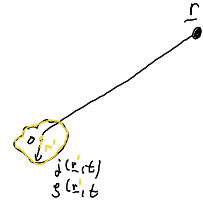


4.3. Multipolstrahlung

Ziel: Die retardierten Potentiale sollen für räumlich lokalisierte t -abhängige Ladungs- und Stromverteilungen berechnet werden.

(analog zur Multipolentwicklung in der Statik)

$$r \gg r'$$



Voraussetzung: Lorenz-Eichung $\dot{\phi} + c^2 \nabla \cdot \underline{A} = 0$

→ aus $\underline{A}(r, t)$ kann $\phi(r, t)$ und damit auch $\underline{E}(r, t), \underline{B}(r, t)$ berechnet werden.

Startpunkt: Lösung von $\square \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}$

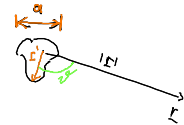
$$\underline{A}(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\underline{j}(r', t - \frac{|r-r'|}{c})}{|r-r'|}$$

retardiertes Potential

1. Näherung: $r \gg a$ a : Ausdehnung der Quelle

$$\frac{1}{|r-r'|} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} (r \cdot r') + \dots$$

$$r \cdot r' = r r' \cos \vartheta$$



$$\rightarrow \underline{A}(r, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \underline{j}(r', t - \frac{|r-r'|}{c}) + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' (r \cdot r') \cdot \underline{j}(r', t - \frac{|r-r'|}{c})$$

2. Näherung: $t - \frac{|r-r'|}{c} \approx \underbrace{t - \frac{r}{c}}_{\tau} + \frac{r \cdot r'}{c r} + \dots$

falls $\tau \gg \frac{r' r}{c r} \sim \frac{a}{c}$

relative Retardierung der einzelnen Punkte der Quelle ist klein

τ : charakteristische Zeit für Änderung von \underline{j}

z.B. harmonische Erregung $\underline{j} \sim e^{i\omega t}$

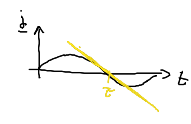
$$\omega \tau = 2\pi$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{c}$$

→ $a \ll \lambda$

NB: - gute Näherung für Rayleigh-Strahlung ($a \ll \lambda$)
 - schlechte Näherung für Mie-Strahlung (Wassertropfen $a \approx \lambda$)

$$\Rightarrow \underline{j}(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}) \approx \underline{j}(\underline{r}', t - \frac{r}{c}) + \frac{r r'}{c r} \frac{\partial \underline{j}}{\partial t}(\underline{r}', \tau)$$



Einsetzen von 1. & 2. Näherung in $\underline{A}(\underline{r}, t)$:

$$\underline{A}(\underline{r}, t) \approx \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \underline{j}(\underline{r}', \tau)}_{A^{(0)}(\underline{r}, \tau)} + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int d^3 r' (\underline{r} \underline{r}') \left(1 + \frac{r}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) \underline{j}(\underline{r}', \tau)}_{A^{(1)}(\underline{r}, \tau)} + \dots$$

↑
Monopolterm

niedrigste Ordnung vernachlässigt nicht,
da im Gegensatz zur Statik $\nabla \cdot \underline{j} \neq 0$

mit $\nabla_{r'} \cdot [\underline{x}_k \underline{j}] = \underline{x}_k \cdot \nabla_{r'} \underline{j}(\underline{r}', \tau) + \underline{j}_k(\underline{r}', \tau) - \dot{j}_k(\underline{r}, \tau)$ *— Ladungsverhaltung, Kontinuitätsgleichung*

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} \nabla_{r'} \cdot (\underline{x}_k \underline{j}) d^3 r' = - \int_{\mathbb{R}^3} \dot{j}_k(\underline{r}', \tau) d^3 r' + \int_{\mathbb{R}^3} \underline{j}_k(\underline{r}', \tau) d^3 r'$$

↙

0

$\int_{S(\infty)} d\underline{x} \underline{x}_k \underline{j}$

↙

$\underline{j} \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$

$\dot{p}_k(\tau)$

el. Dipolmoment $\underline{p}(\tau) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \underline{r}' \rho(\underline{r}', \tau)$

$$A^{(0)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\underline{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

elektische Dipolstrahlung

4.3.1. Elektische Dipolstrahlung

Hertzscher Dipol (H. Hertz 1857 - 1894)

$$\uparrow \underline{p}(t) = p_0 e^{-i\omega t}$$

Gesamtladung $Q_0 = 0$

$$A^{(0)}(\underline{r}, t) = \frac{-i\omega \mu_0}{4\pi r} p_0 e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})}$$

$$= \frac{-i\omega \mu_0 p_0}{4\pi r} \frac{e^{i(kr) - i\omega t}}{r}$$

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Kugelwelle

el. Potential aus Lorentz-Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(\underline{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \nabla \cdot \underline{A}^{(0)}(\underline{r}, t) = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \nabla \cdot \left(\frac{1}{r} \dot{\underline{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right)$$

$$\rightarrow \phi(r, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla_r \cdot \left\{ \frac{1}{r} \dot{p}(t - \frac{r}{c}) \right\} + \phi_{\text{stat}}^{(0)}(r) \left\{ \begin{array}{l} \text{statische Monopolterm} \\ \text{o. B. d. A. keine Flächenladung, } Q_0 = 0 \\ \rightarrow \phi_{\text{stat}}^{(0)} = 0 \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \underbrace{\frac{r}{c r^2} \dot{p}(t - \frac{r}{c})}_{\sim \frac{1}{r}} + \underbrace{\frac{1}{r^3} r \cdot \dot{p}(t - \frac{r}{c})}_{\frac{1}{r^2}} \right\}$$

↑
Fernfeld

↑
Nahfeld

Grenzfälle:

(i) Fernzone (Wellenzone) $r \gg \lambda (\gg a)$

$$\phi_F^{(0)}(r, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c r^2} r \cdot \dot{p}(t - \frac{r}{c})$$

$$\left[\frac{1}{c} \dot{p} \sim \frac{\omega}{c} p \gg \frac{p}{r} \right]$$

Retardierung ist wichtig

(ii) Nahzone (quasi statischer Bereich) $\lambda \gg r (\gg a)$

$$\phi_D^{(0)}(r, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} r \cdot \dot{p}(t) + \left[-\frac{1}{r^3} \frac{r}{c} r \cdot \ddot{p}(t) + \frac{1}{c r^2} r \cdot \dot{p}(t) \right] \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

↑
Entwicklung nach $p(t)$

Retardierung kompensiert den \dot{p} -Term des Fernfeldes
das 2. Terms

instantanes Dipolpotenziale!

Siehe VL vom 16.10 $\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot r}{r^3}$

Berechnung der Felder in Fernfeldnäherung (Dipolnäherung)

$$\underline{B}_F(r, t) = \nabla \times \underline{A}^{(0)} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{1}{r^2} \left[\ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \times r \right] + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

↑ Rotation auf \ddot{p} ↑ $\frac{r}{r^2}$ ableiten liefert Terme $O\left(\frac{1}{r^2}\right)$

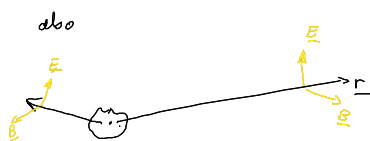
$$\underline{E}_F(r, t) = -\nabla \phi_F^{(0)} - \dot{\underline{A}}^{(0)}(r, t)$$

Übers ↓

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r^3} \left[\ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \times r \right] \times r + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

es gilt: $\underline{E} \times \left(\frac{r}{r}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{1}{r^3} (\ddot{p} \times r) \times r = \frac{1}{c} \underline{E}$



$\underline{r}, \underline{E}, \underline{B}$ bilden ein Rechtssystem im Fernfeld

$$\underline{r} \perp \underline{E} \perp \underline{B}$$

Ausbreitung wie eine freie Kugelwelle

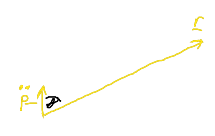
NB: In der Nahzone gilt immer noch $\underline{B} \perp \underline{r}$
 aber \underline{E} hat longitudinale Anteile $\underline{E}_{||} \parallel \underline{r}$

Energieabstrahlung im Fernfeld

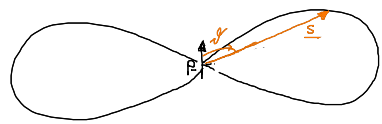
Poynting - Vektor

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{E} \times \underline{H} = -\frac{1}{\mu_0} \underline{B}_F \times \underline{E}_F = -\frac{c}{\mu_0 r} \underline{E}_F \times (\underline{B}_F \times \underline{r}) \\ &= -\frac{c}{\mu_0 r} \left\{ \underbrace{(\underline{B}_F \cdot \underline{r}) \underline{E}_F - B^2 \underline{r}} \right\} \\ &= \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \frac{1}{r^4} \left(\underbrace{\ddot{\underline{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \underline{r}} \right)^2 \frac{1}{r} \end{aligned}$$

$$\underline{S} = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} |\ddot{\underline{p}}|^2 \frac{1}{r^2} \sin^2 \vartheta \frac{\underline{r}}{r}$$



Abstrahlcharakteristike:
 stark richtungsabhängig



Heisler Dipol:
 $\underline{p}(t) = \underline{p}_0 e^{-i\omega t} \quad : \quad |\ddot{\underline{p}}|^2 = \underline{p}_0^2 \omega^4$

=> blaues energiereiches Licht wird mehr gestreut als rotes
 -> Himmelblau
 Rayleigh - Streuung

• bewegte Ladung: $\ddot{\underline{p}} = q \underline{a}(t)$

Gesamtenergie der Abstrahlung $\int \underline{S} \, d\underline{t} \Rightarrow$

(Larmor - Gleichung)

$$P = \int \underline{S} \cdot 2\pi r^2 \sin^2 \vartheta = \frac{q^2 |a|^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}$$

abgestrahlte Leistung $\sim |a|^2$
 Strahlungs-dämpfung!