4.2. Retardierte Potenziale

Ziel: Lösung der Wellengleichungen zur Bestimmung der Potenziale $\phi, \underline{A}$

Methode: Lösung der DGLn im Fourierraum
-> danach Rücktransformation

$$\boxed{\begin{aligned} \Box\phi &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ \Box\underline{A} &= -\mu_0 \underline{j} \end{aligned}}$$

Lorentz - Eichung

Allgemein $\quad \Box u(\underline{r},t) = -f(\underline{r},t)$

gesucht

Quellen, Inhomogenitäten

$\Downarrow$ Fourier Trafo

$$\hat{u}(\underline{k},\omega) = \hat{G}\cdot\hat{f}(\underline{k},\omega)$$

Inverse des Diff. Operators

$\Downarrow$ Rücktrafo

$$u(\underline{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')\, f(\underline{r}', t')$$

Fourier - Transformation

$\underline{q}$: Wellenvektor

$$S(\underline{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\; \hat{S}(\underline{q},\omega)\, e^{i(\underline{q}\underline{r} - \omega t)}$$

$$\hat{S}(\underline{q},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r \int_{-\infty}^{\infty} dt\; S(\underline{r},t)\, e^{-i(\underline{q}\underline{r} - \omega t)}$$

Anwenden des $\Box$ - Operators

linke Seite der DGL $\qquad$ rechte Seite der DGL

$$\Box_{\underline{r},t} u(\underline{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\; \hat{u}(\underline{q},\omega)\, \underbrace{\Box_{\underline{r},t} e^{i(\underline{q}\underline{r}-\omega t)}}_{-\left(q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) e^{i(\underline{q}\underline{r}-\omega t)}} = -\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\; \hat{f}(\underline{q},\omega)\, e^{i(\underline{q}\underline{r}-\omega t)}$$

Gleichung für Integranden

$$\Rightarrow \quad -\left(q^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\hat{u}(q,\omega) = -\hat{f}(q,\omega)$$

Green'sche Funktion im Fourier-Raum

$$\Rightarrow \quad \hat{u}(q,\omega) = \frac{\hat{f}(q,\omega)}{\left(q^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)} \quad \rightarrow \quad \boxed{\hat{G}(q,\omega) = \frac{1}{q^2-\frac{\omega^2}{c^2}}}$$

<u>Rücktransformation</u>

$$u(r,t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; \hat{u}(q,\omega)\, e^{i(qr-\omega t)}$$

$\hat{f}(q,\omega)$ bekannt, wenn Quellen also $f(r,t)$ im Ortsraum bekannt sind

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; \frac{1}{\left(q^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \; f(r',t')\, e^{-i(qr'-\omega t')}}_{\hat{f}(q,\omega)} \; e^{i(qr-\omega t)}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} dr' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \underbrace{\left\{ \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{\mathbb{R}^3} d^3q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; \frac{e^{iq(r-r')-i\omega(t-t')}}{q^2-\frac{\omega^2}{c^2}} \right\}}_{G(r-r',\, t-t')} f(r',t')$$

Green'sche Funktion im Ortsraum

noch zu tun: Integral lösen

Problem: komplexe Integration

$\tau = t-t'$

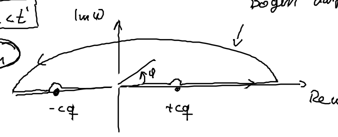
<u>Komplexe Integration</u>

Bogen darf keinen Beitrag zum Integral liefern

dann: Kreisintegral $\hat{=} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega$

$\boxed{t<t'}$

C_1



$0 \le \varphi \le \pi$

$\tau < 0$

$\rightarrow \quad \left|e^{-i\omega(t-t')}\right|$ muss verschwinden auf Bogen

Bogen:

$\omega = Re^{i\varphi}$

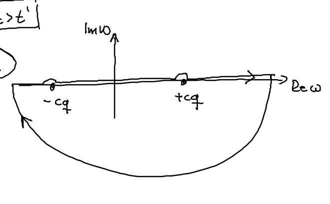
$d\omega = iRe^{i\varphi}\,d\varphi$

$$= \left|e^{-iR(\cos\varphi + i\sin\varphi)\tau}\right| = e^{R\sin\varphi\,\tau} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

($\sin\varphi > 0$, $\tau < 0$)

$\boxed{t>t'}$

C_2



$\tau > 0$

$\pi \le \varphi \le 2\pi$

$$\left|e^{-i\omega(t-t')}\right| = e^{R\sin\varphi\,\tau} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

($\sin\varphi < 0$, $\tau > 0$)

- Integrand hat Pole bei $\pm cq$

$\rightarrow$ Green'sche Funktion wird eindeutig wenn der Integrationsweg um Pole festgelegt ist

1. großer Halbkreis darf keinen Beitrag zum Integral liefern
2. kleiner Halbkreis durch <u>Kausalität</u> bestimmt

[Zukunft von $f(r',t')$ darf <u>nicht</u> die Vergangenheit beeinflussen

$\rightarrow G(r-r', t-t') = 0$ für $t < t'$]

$\tau = t-t'$

Residuensatz

$$\Gamma(q,\tau) := \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = \oint_C d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = 2\pi i \sum_{\text{Pole}} \text{Res}$$

$\boxed{\tau < 0}$ keine Pole im Inneren von C_1 $\rightarrow$ $\Gamma(q,\tau) = 0$ $\rightarrow$ $G(r - r', t - t') = 0$ Kausalität erfüllt ✓

$\boxed{\tau > 0}$ $$\Gamma(q,\tau) = -2\pi i \sum_{\omega = \pm cq} \text{Res} \frac{e^{-i\omega\tau}}{-\frac{1}{c^2}(\omega - cq)(\omega + cq)} = \underline{2\pi i c^2 \left(\frac{e^{-icq\tau}}{2cq} + \frac{e^{icq\tau}}{-2cq} \right)}$$

Integration entlang C_2
(Umlauf ist math. negativ)

$$\Rightarrow G(\underline{r} - \underline{r}', \underbrace{t - t'}_{\tau}) = \frac{c}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3q \, e^{i\underline{q}\cdot(\underline{r} - \underline{r}')} \left(\frac{e^{-icq\tau} - e^{icq\tau}}{-2iq} \right)$$

Integration über q in Kugelkoordinaten

$$d^3q = q^2 dq \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta$$

$$\underline{q} \cdot \underbrace{(\underline{r} - \underline{r}')}_{\underline{s}} = q \cdot s \cos\vartheta$$

$d\vartheta \sin\vartheta = dy$

$\int d\vartheta \, e^{iqs\cos\vartheta} \sin\vartheta$

Subst.: $y = \cos\vartheta$

$$G(\underline{r} - \underline{r}', \tau) = \frac{c}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} dq \, q \, \frac{e^{-icq\tau} - e^{icq\tau}}{-2i} \underbrace{\int_{-1}^{1} d(\cos\vartheta) \, e^{iqs\cos\vartheta}}_{\frac{e^{iqs} - e^{-iqs}}{iqs}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}$$

Subst.:
$\xi := cq$

$$= \frac{1}{2(2\pi)^2 s} \int_0^{\infty} d\xi \left\{ \underbrace{e^{i(\tau - \frac{s}{c})\xi} + e^{-i(\tau - \frac{s}{c})\xi}}_{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tau - \frac{s}{c})\xi} d\xi} \underbrace{- e^{i(\tau + \frac{s}{c})\xi} - e^{-i(\tau + \frac{s}{c})\xi}} \right\}$$

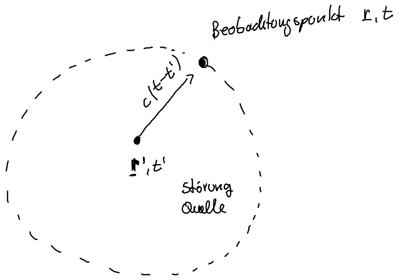
mit:
$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{4\pi s} \left\{ \delta\left(\tau - \frac{s}{c}\right) - \delta\left(\tau + \frac{s}{c}\right) \right\}$$

Ergebnis

$$\boxed{G(\underline{r} - \underline{r}', t - t') = \begin{cases} \frac{1}{4\pi|\underline{r} - \underline{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}\right) & t > t' \\ 0 & t < t' \end{cases}}$$

retardierte Greenfunktion



δ - förmige Wellenfront breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit aus

Phys. Interpretation: $G(\overbrace{\underline{r}-\underline{r}'}^{s}, \overbrace{t-t'}^{\tau})$ ist das Potenzial $\phi(\underline{r},t)$, das von einer punktförmigen Ladungsdichte $\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \delta(\underline{r}-\underline{r}')\,\delta(t-t')$ am Ort $\underline{r}'$ zur Zeit t' erzeugt wird.

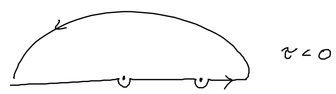
Für beliebige $\rho(\underline{r},t)$, $\underline{j}(\underline{r},t)$ ergeben sich die retardierten Potenziale: (durch Faltung)

$$\phi(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{\rho\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

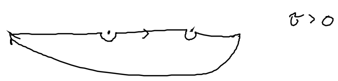
$$\underline{A}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{\underline{j}\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

ϕ, $\underline{A}$ sind bestimmt durch $\underline{r}'$ zu den retardierten Zeiten $t' = t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}$ → endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der el.-magn. Felder mit c

NB: Für den Integrationsweg



erhält man die avancierte Green'sche Funktion (= 0 für $t > t'$)



- beschreibt eine einlaufende Kugelwelle die sich auf einen Punkt zusammenzieht.