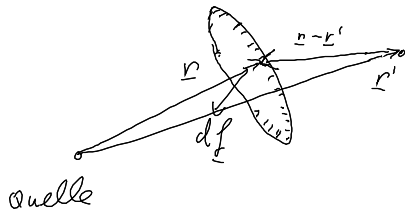


Mit $\underline{R} := \underline{r} - \underline{r}'$ lautet die Kirchhoff-Identität

$$\phi(\underline{r}') = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} d\underline{f}_R \left\{ \frac{e^{i\kappa R}}{R} \nabla \phi(\underline{r}) - \phi(\underline{r}) \nabla_{\underline{r}} \frac{e^{i\kappa R}}{R} \right\} \\ = \frac{e^{i\kappa R}}{R} \left(i\kappa - \frac{1}{R} \right) \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

Außenraum



Mit $d\underline{f} \cdot \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = d\underline{f} \cos \alpha$

und Beschränkung auf Fernzone
von ∂V
(d.h. $R \gg \frac{1}{\kappa}$)

$$\phi(\underline{r}') \approx \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} d\underline{f}_R \left\{ \frac{\partial \phi(\underline{r})}{\partial n} - i\kappa \phi(\underline{r}) \cos \alpha \right\} \frac{e^{i\kappa R}}{R}$$

richtungsabhängige Amplitude
Kugelwelle

„Sekundärwellen“

Exakte Formulierung des Huygenschen Prinzips
(Jeder Punkt der Oberfläche eines Hindernisses
ist Ausgangspunkt einer Kugelwelle; deren
phasengerechte Überlagerung ergibt das Wellen-
feld in \underline{r}')

(e) 4.4.2 Kirchhoff-Identität zu: Greenfunktion zu

Randbedingung

$$\tilde{g}(\underline{r} - \underline{r}') = 0 \\ \left. \begin{array}{l} \underline{r} \in \partial V \\ \underline{r}' \in V \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(\underline{r}') = - \int_{\partial V} d\underline{f} \phi(\underline{r}) \nabla_{\underline{r}} \tilde{g}(\underline{r} - \underline{r}')$$

Die neue Greensche Funktion unterscheidet sich von der alten nur um eine additive Lösung g der homogenen Wellengleichung

$$\tilde{g}(R) = g(R) + \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\kappa R}}{R}$$

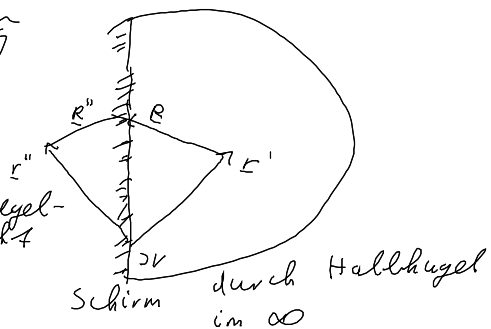
$$(\Delta + \kappa^2) g = 0$$

mit Randbedingung $g|_{\partial V} = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\kappa R}}{R} \Rightarrow \tilde{g} = 0$ auf Rand

Beispiel für die Konstruktion von \tilde{g}
Ebenes Schirm

Spiegelladungsmethode

$$\tilde{g}(r-r') = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{i\kappa|r-r'|}}{|r-r'|} - \frac{e^{i\kappa|r-r''|}}{|r-r''|} \right) \text{ Spiegel-}$$



Berechne

$$\nabla_r \tilde{g}(r-r') = \frac{1}{4\pi} \left(\nabla_r \frac{e^{i\kappa R}}{R} - \nabla_r \frac{e^{i\kappa R''}}{R''} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{i\kappa R}}{R} \left(i\kappa - \frac{1}{R} \right) \frac{r-r'}{|r-r'|} - \frac{e^{i\kappa R''}}{R''} \left(i\kappa - \frac{1}{R''} \right) \frac{r-r''}{|r-r''|} \right)$$

mit $R = R''$, $df \frac{r-r'}{|r-r'|} = -df \frac{r-r''}{|r-r''|} = df \cos \alpha$

folgt $df \cdot \nabla_r \tilde{g} = df \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\kappa R}}{R} \left(i\kappa - \frac{1}{R} \right) \cos \alpha$

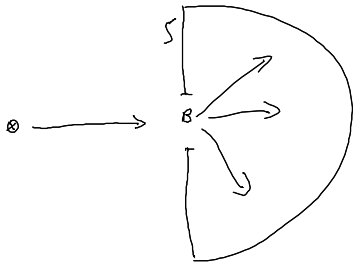
Für $z \ll R$ (Fernzone)

$$\phi(r') = - \int_{\partial V} \left(\mu_f \cdot \nabla_r \tilde{g}(r-r') \right) \phi(r) = -\frac{i}{z} \int_{\partial V=F} dF \phi(r) \frac{e^{i\kappa|r-r'|}}{|r-r'|} \cos \alpha$$

Zur Konstruktion der Lösung müssen die Randwerte „erraten“ werden! $\phi(r)|_{\partial V}$

4.4.3. Kirchhoffsche Näherung

Beugung an Blende B in einem ebenen Schirm S



Annahme

$$\phi(z)|_S = 0 \quad (\text{Leiter})$$

$$\phi(z)|_B = \frac{e^{i\kappa R^q}}{R^q}$$

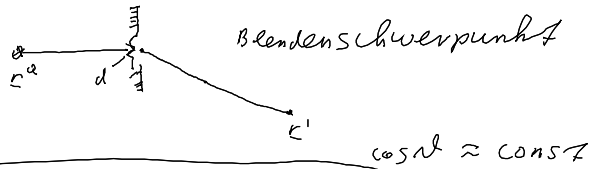
$$\Rightarrow \phi(r') = -\frac{i}{2} \int_B df \frac{e^{i\kappa(R+R^q)}}{R R^q} \cos \alpha$$

$$B = r - r'$$

$$R^q = r - r^q$$

$$df = d^2 r$$

kleine Blende
(aber $\lambda \ll d$)



$$\phi(r') \approx -\frac{i}{2} \frac{\cos \alpha_0}{R_0 R_0^q} \int_B df e^{i\kappa(R+R^q)}$$

Index 0 \rightarrow zum Schwerpunkt

Grenzfälle

(i) Fraunhofersche Beugung (Fernzone: $\lambda \ll d \ll R$)

setze $B = R_0 + \xi$

$$\hookrightarrow R^2 \approx R_0^2 + 2 R_0 \cdot \xi + \frac{\xi^2}{2}$$

wird vernachlässigt

$$\leadsto R^2 \approx R_0^2 + 2 R_0 \xi$$

bzw $R \approx R_0 + \alpha \cdot \xi$ mit $\alpha = \frac{R_0}{R_0}$

analog $R^q \approx R_0^q + \alpha_0 \cdot \xi$ mit $\alpha_0 = \frac{R_0^q}{R_0^q}$

$$\Rightarrow \phi(r') \approx -\frac{i}{2} \frac{e^{i\kappa(R_0+R_0^q)}}{R_0 R_0^q} \cos \alpha_0 \int_B d^2 \xi e^{i\kappa(\alpha+\alpha_0)\xi}$$

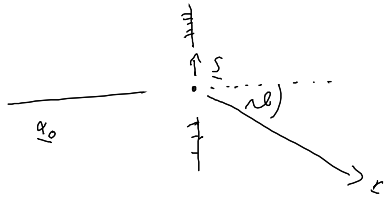
(ii) Fresnelbeugung (Mittelzone $\lambda \ll R \approx d$)

$$R^2 \approx R_0^2 + 2 R_0 \xi + \xi^2 \quad \text{nicht genähert.}$$

Beispiel Fraunhofer Beugung am Spalt. (1-dim)

Senkrechter Einfall

$$\alpha_0 - \underline{s} = 0$$

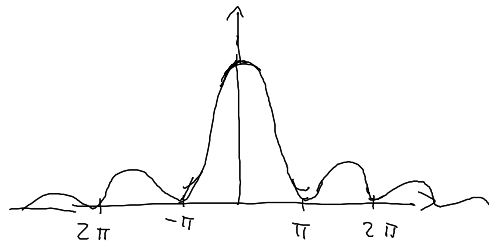


$$\begin{aligned} \phi(x') &= C \int_{-d/2}^{d/2} ds_1 e^{i\kappa \alpha s_1} \quad \text{mit} \quad \alpha = \sin \theta_0 \\ &= \frac{C}{i\kappa \alpha} \left(e^{i\kappa \alpha \frac{d}{2}} - e^{-i\kappa \alpha \frac{d}{2}} \right) \quad \alpha \cdot \underline{s} = s_1 \sin \theta_0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\phi(x') = C d \frac{\sin\left(\kappa \alpha \frac{d}{2}\right)}{\kappa \alpha \frac{d}{2}}}$$

„Spaltfunktion“
(Fouriertransformierte der Rechteckblende)

$$|\phi(x)|^2 \sim I \text{ (Intensität)}$$



$$\begin{aligned} \kappa \alpha \frac{d}{2} &= \kappa \frac{d}{2} \sin \theta_0 \\ &\text{(Beobachtungswinkel)} \end{aligned}$$

Beugungsminima bei $\sin \theta_0 = n \cdot \frac{\lambda}{d}$