

## 6.2. Vierervektoren und Minkowski-Raum (Fortsetzung)

### 6.2.1. Formalisierung der Weltlinien

Der raum-zeitliche Abstand  $ds$   $(ds)^2 := (cdt)^2 - (d\mathbf{r})^2$   
bleibt invariant bei Lorentz-Transformation zwischen Inertialsystemen.

- Schreibe  $(ds)^2$  als Skalarprodukt von Vierervektoren (Zeit-Ort) im Minkowski-Raum  $V$ .
- stelle Lorentz-Trafo als lineare orthogonale Trafo in  $V$  dar, die das Skalarprodukt invariant lässt.

► Def.: kontravariante Komponenten des Vierervektors

$$x^0 := ct$$

$x^i, i=1,2,3$ : kart. Komponenten des Ortsvektors  $\underline{r}$

$$\rightarrow (ds)^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

nicht-euklidisches Skalarprodukt!

(Euklidischer Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  mit euklid. Metrik

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Spaltenvektor  
↓  
Zeilenvektor  
metrischer Tensor  
 $g_{ij} = \delta_{ij} = (11)_{ij}$

hier: nicht-euklidischer Raum  $V$ , metr. Tensor:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Damit lässt sich schreiben

$$(ds)^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 dx^\mu g_{\mu\nu} dx^\nu \stackrel{\text{Einstein'sche Summenkonvention}}{=} dx^\mu g_{\mu\nu} dx^\nu = \boxed{dx^\mu dx_\mu = (ds)^2}$$

Vereinfachung durch  $dx_\mu := \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\nu$

► Def.: kovariante Komponenten des Vierervektors

$$\boxed{\begin{matrix} x_0 := x^0 \\ x_i := -x^i \end{matrix}} \quad i=1,2,3$$

- Verallgemeinerung auf bel. Vierervektoren  $a^i$ :  $a_0 = a^0$   
 $a_i = -a^i \quad (i=1,2,3)$

- Alle Lorentz-invarianten lassen sich als Skalarprodukt  $a^\mu a_\mu$  schreiben.

- Zeitartige Vierervektoren:  $x^\mu x_\mu > 0$

(alle 0 erreichbare Weltlinien)



- Raumartige Vierervektoren :  $x^\mu x_\mu < 0$

Lorentz-Trafo (linear, homogen),  $\Sigma \rightarrow \Sigma'$

$$x'^\mu = U^\mu_\nu x^\nu \quad \text{mit} \quad U^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\underline{v} \parallel x^1)$$

$\begin{matrix} \uparrow & \downarrow \\ \text{Zeile} & \text{Spalte} \end{matrix}$

$$x'^\mu = g_{\lambda\mu} x'^\lambda = \underbrace{g_{\lambda\mu} U^\lambda_\nu}_{U_\mu^\nu} x^\nu \quad U_\mu^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kontravariant  $x^\nu \in V$   
 kovariant  $x_\nu \in \tilde{V}$  duale  
 Vektorraum zu  $V$

„Heben oder Senken der Indizes durch  $g^{\mu\nu}$  bzw.  $g_{\mu\nu}$ “

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu = \underbrace{dx^\nu g_{\nu\mu}}_{dx_\mu} dx^\mu = dx^\nu dx_\nu$$

Invarianz des Skalarproduktes:  $\downarrow$  in  $\Sigma'$   $\downarrow$  in  $\Sigma$

$$\left. \begin{aligned} x'^\mu &= U^\mu_\nu x^\nu \\ x'^\lambda &= U^\lambda_\rho x^\rho \end{aligned} \right\} x'^\mu x'^\lambda = \underbrace{U^\mu_\nu U^\lambda_\rho}_{\underline{1}} x^\nu x^\rho \stackrel{!}{=} x^\nu x^\rho$$

$$\left[ U^\mu_\nu U^\lambda_\rho \right] = (U^T)^\mu_\nu U^\lambda_\rho$$

$\uparrow$   
 Zeilen und Spalten  
 vertauscht

$$U^T U = \underline{1}$$

$$\boxed{U^T = U^{-1}}$$

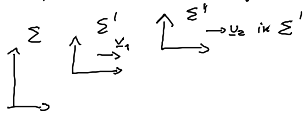
d.h.  $U$  orthogonal.

Also ist  $U_\mu^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & & \\ \beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$  die inverse Lorentz-Trafo zu  $U^\nu_\mu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & & \\ -\beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ .

( $\beta \rightarrow -\beta$ )

$$U^{-1}(\beta) = U(-\beta)$$

- Addition von Geschwindigkeiten:



$$\beta = \frac{v_1}{c}, \quad \alpha = \frac{v_2}{c} \quad \Rightarrow \quad \beta_{res} = \frac{v_{res}}{c} \stackrel{!}{=} \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta} = \beta_{res}$$

nichtrelativistischer Grenzfall ( $\alpha, \beta \ll 1$ ):  $\beta_{res} = \alpha + \beta$  (Galilei)

relativ. Grenzfall ( $\alpha = 1$ ):  $\beta_{res} = \frac{1 + \beta}{1 + \beta} = 1$

- Die Lorentz-Trafo  $U(\beta)$  zur Geschwindigkeit  $v = \beta c$  bilden eine Gruppe (Lorentz-Gruppe) mit der Verknüpfung

$$U(\alpha) \cdot U(\beta) = U\left(\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}\right) \quad (\text{Add. Theorem})$$

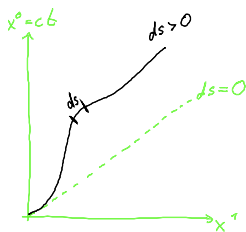
Gruppenaxiome: (1) Assoziativgesetz  $U(\beta_1)(U(\beta_2)U(\beta_3)) = (U(\beta_1)U(\beta_2))U(\beta_3)$   
 (2) Es. ex. Einselement  $U(0) = \mathbb{1}$   
 (3) Zu jedem  $U(\beta)$  ex. eine Inverse  $U(\beta^{-1}) = U(-\beta)$

### 6.2.2. Relativistische Mechanik

Lorentz-invariante Formulierung der Mechanik mit Hilfe von Vierervektoren u. Skalaren (= Invarianten)

Vierervektoren:  $x^\mu(t)$ : Parametrisierung der Weltlinien  $(ct, x, y, z)$  durch  $t$  ungeeignet da sich  $t$  bei Lorentz-Transform. ändert.

Def.: Eigenzeit = Zeit im momentanen Ruhesystem (vom Fühler mitgeführte Uhr)  
 $\Rightarrow x^\mu(\tau)$



$$\tau = \frac{s}{c}$$

Boglänge der Weltlinie

$$\begin{aligned} ds &= (dx^\mu dx_{\mu})^{1/2} = (c^2 dt^2 - (dx)^2)^{1/2} \\ &= c \left[ 1 - \left( \frac{1}{c} \frac{dx}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt \\ &= c (1 - \beta^2)^{1/2} dt \\ &= c \frac{dt}{\gamma} \\ &= c d\tau \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{1}{c} \left| \frac{dx}{dt} \right|$$

Lorentz-Transform. für  $dx=0$   
 $d\tau = dt' = \frac{dt}{\gamma}$  (momentanes Ruhesystem)

Def.: Vierergeschwindigkeit

$$u^\mu := \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{1}{c} \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

dimensionslos!

$$u^\mu u_\mu = \frac{dx^\mu dx_{\mu}}{(ds)^2} = \frac{(ds)^2}{(ds)^2} = 1$$

Lorentz-invariant, Einheitsvektor.  
 da skalar

Komponenten  $u^\mu = \frac{1}{c} \frac{dx^\mu}{d\tau}$

$$u^0 = \gamma$$

$$u^i = \frac{\gamma}{c} v^i = \frac{1}{c} \frac{dx^i}{d\tau}$$

$\rightarrow 1$  nichtrelativ. Grenzfall  $\beta \ll 1$

$\rightarrow \frac{1}{c} v^i$  Teilungsgeschw.

Def.: Viererimpuls

$$p^\mu := m_0 c u^\mu$$

$$= m_0 \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

mit Ruhemasse  $m_0$

$$p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2 u^\mu u_\mu = m_0^2 c^2 \quad \text{Lorentz-invariante}$$

$$p^0 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = m(v) c = p_0$$

$$p^i = \frac{m_0 v^i}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = m(v) v^i = -p_i$$

mit geschwindigkeitsabhängiger Masse

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Physikalische Bedeutung von  $p^0$

Verallg. des Newton'schen Grundgesetzes

$$\underline{F} = \frac{d}{dt} \underline{p} \quad (\text{nicht lorentz-invariant})$$

auf rel. invariante Form:

► Def.: Viererkräfte (Minkowski-Kraft)

$$\boxed{f^\mu := \frac{d}{d\tau} p^\mu} = m_0 c \frac{du^\mu}{d\tau} = m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$$

Leistungsbilanz

$$u^\mu u_\mu = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{d\tau} (u^\mu u_\mu) = 2 \frac{du^\mu}{d\tau} u_\mu = 0$$

$$f^\mu u_\mu = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{d}{d\tau} p^0 + \frac{d}{c} \sum_{i=1}^3 f^i v_i = \frac{1}{c} \left[ \frac{d}{d\tau} (c p^0) - \underline{f} \cdot \underline{v} \right] = 0$$

↑ Änderung der Energie  
↑ Leistung

► Def.: relativistische Energie

$$\boxed{E := c p^0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}} = m(v) c^2$$

somit  $p^0 = \frac{E}{c} \rightarrow$  Energie

und  $f^0 = \frac{1}{c} \underline{f} \cdot \underline{v}$  Leistung mit  $\underline{f} = (f^1, f^2, f^3)$

Relativistische Energie-Impuls Beziehung

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \underline{p}^2 = (m_0 c)^2$$

$$\rightarrow \boxed{E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 \underline{p}^2}$$

↑  
Ruhenergie<sup>2</sup>

• nichtrelativ. Grenzfall  $|\underline{p}| \ll m_0 c$

$$\rightarrow E = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{\underline{p}^2}{m_0^2 c^2}} \approx m_0 c^2 \left( 1 + \frac{\underline{p}^2}{2 m_0^2 c^2} + \dots \right)$$

$$E \approx m_0 c^2 + \frac{\underline{p}^2}{2 m_0} + \dots$$

↑  
Ruhenergie    kinet. Energie

$$\underline{p} = 0 : E = m_0 c^2$$

→ Äquivalenz von Ruhemasse und Energie

• Hochrel. Grenzfall :  $u_0 = 0$  (z.B. Photon)

$$E = c|p| \quad , \quad p^\mu = (|p|, \vec{p}) \quad \text{mit} \quad p^\mu p_\mu = 0$$

$v = c \Rightarrow u^\mu$  nicht mehr definiert, da  $\gamma \rightarrow \infty$   
Lichtartigen Vektor  
 $\hat{=}$  für Photon vergeht keine Eigenzeit