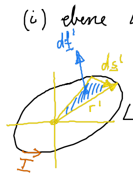
2.5. Magnetisches Dipolmoment

$$\underline{m} := \frac{1}{2}\int d^3r'\, \underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}') \qquad \leftarrow \text{magnetisches Dipolmoment}$$

Dipolpotenzial (magn.) $\quad A^{(1)}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\,\underline{m}\times\underline{r}$

Beispiel: (i) ebene Leiterschleife L



(*) $\quad d\underline{f}' = \frac{1}{2}\,\underline{r}'\times d\underline{s}'$

$$d^3r'\,\underline{j}(\underline{r}') = d\underline{s}'\, I \qquad (\underline{j}(\underline{r}') = 0 \text{ überall wo } L \text{ nicht ist})$$

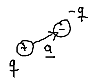
Strom durch L

$$\underline{m} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\,\underline{r}'\times\underline{j}(\underline{r}') = \frac{I}{2}\oint_L \underline{r}'\times d\underline{s}' \overset{(*)}{=} I\int_F d\underline{f} = \underline{\underline{I\cdot F\cdot \underline{n}}}$$

$\underline{n}$: Normale auf der von L eingeschl. Fläche

Ringstrom $\longrightarrow$ magn. Dipolmoment

[analog



$\underline{p} = \underline{a}\cdot q$]

(ii) Bewegte Ladungen

N Teilchen mit Masse m_i und Ladung q_i

spezifische Ladung $\quad \frac{q_i}{m_i} = \frac{q}{m} = \text{const.}$

$$\rho(\underline{r}) = \sum_i q_i\,\delta(\underline{r}-\underline{r}_i)$$

$$\underline{j}(\underline{r}) = \sum_i q_i\,\underline{v}_i\,\delta(\underline{r}-\underline{r}_i) \qquad \text{mit Geschwindigkeit } \underline{v}_i = \frac{d\underline{r}_i}{dt}$$

magn. Dipolmoment

$$\underline{m} = \frac{1}{2}\int d^3r'\,\underline{r}'\times\Big(\sum_i q_i\,\underline{v}_i\,\delta(\underline{r}'-\underline{r}_i)\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i q_i\,(\underline{r}_i\times\underline{v}_i)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i \frac{q_i}{m_i}\underbrace{m_i\,(\underline{r}_i\times\underline{v}_i)}_{\underline{L}_i} = \frac{q}{2m}\,\underline{L}$$

Bahndrehimpuls

$$\boxed{\underline{m} = \frac{q}{2m}\,\underline{L}}$$

gilt auch für starre Körper

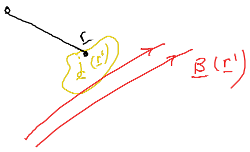
(aber nicht für Spin eines Elektrons

$\underline{m} = g\frac{e}{2m}\,\underline{S}$ mit $g\approx 2$ siehe QM)

2.6. Potenzial des magn. Dipols

$\underline{j}(\underline{r}') = \rho(\underline{r}')\, \underline{v}(\underline{r}')$ Stromverteilung im Feld einer magn. Induktion $\underline{B}(\underline{r}')$

externes Feld



$$\underline{F} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}') \times \underline{B}(\underline{r}')$$ Lorentz Kraft

Taylorentwicklung : (Probedipol im geg. B)

$$\underline{B}(\underline{r}') = \underline{B}(\underline{r}) + \left[(\underline{r}'-\underline{r})\nabla_r\right]\underline{B}(\underline{r}) + \dots$$

$$\to \underline{F}(\underline{r}) = \underbrace{\left[\int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}')\right]}_{0} \times \underline{B}(\underline{r}) + \int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}') \times \left[(\underline{r}'-\underline{r})\nabla_r\right]\underline{B}(\underline{r}) + \dots$$

keine Monopole

$$= \int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}') \times \left[\underbrace{(\underline{r}'\nabla_r)\underline{B}(\underline{r})}_{\nabla_r(\underline{r}'\cdot\underline{B}(\underline{r}))}\right] - \underbrace{\int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}')}_{0} \times \left[(\underline{r}\cdot\nabla_r)\underline{B}(\underline{r})\right]$$

Annahme: $\nabla_r \times \underline{B}(\underline{r}) = 0$

externes Feld soll keine Stromwirbel im Bereich $j(\underline{r}')$ haben

$$= \int d^3r'\, \underbrace{\underline{j}(\underline{r}') \times \nabla_r(\underline{r}'\cdot\underline{B}(\underline{r}))}_{-\nabla_r \times \left[(\underline{r}'\underline{B})\underline{j}(\underline{r}')\right] + (\underline{r}'\underline{B})\,(\underbrace{\nabla_r \times \underline{j}(\underline{r}')}_{0})}$$

[letzte VL

$\int(\underline{r}'\times\underline{j})\times \underline{r}\, d^3r' = \int(\underline{r}'\underline{r})\,\underline{j}(\underline{r}')\, d^3r'$

]

$$= -\nabla_r \times \left(\underline{m} \times \underline{B}(\underline{r})\right)$$

$$\underline{F} = (\underline{m}\cdot\nabla_r)\,\underline{B}(\underline{r}) = -\nabla_r\left(-\underline{m}\cdot\underline{B}(\underline{r})\right)$$

$$\to \boxed{V = -\underline{m}\cdot\underline{B}(\underline{r})}$$

Potenzielle Energie eines Dipols im Magnetfeld

[analog: $V = -\underline{p}\,\underline{E}(\underline{r})$ für elektr. Dipol im elektrischen Feld]

3. Maxwell Gleichung

<u>Ziel</u>: Dynamik der Felder

<u>Methode</u>: Erweiterung der elektrostatischen und magnetostatischen Feldgleichungen, so dass allgemeine <u>Invarianzprinzipien</u> erfüllt sind.

3.1 CPT – Invarianz

1955 Wolfgang Pauli
1954 Gerhard Lüders

: Jeder Vorgang bei dem Materie – Antimaterie, Raumspiegelung, Zeitumkehr ausgeführt wird muss auch ein physikalisch möglicher Vorgang sein.

kann man zeigen unter den Voraussetzungen: Kausalität, Lokalität, Lorentzinvarianz, H nach unten beschränkt.

<u>Diskrete Symmetrien</u>

Zeitumkehr	T :	$t \to t' = -t$
Ladungsumkehr	C :	$Q \to Q' = -Q$
Paritätsumkehr	P ;	$\underline{r} \to \underline{r}' = -\underline{r}$

(i) Zeitumkehr Transformation

$$T_g := \{T\text{-invariante Observablen } A : TA = A\}$$

$$= \left\{ \underline{r},\ d\underline{r},\ \underline{a} := \frac{d^2\underline{r}}{dt},\ m,\ q,\ \rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V},\ \underline{E} \right\}$$ „gerade" unter T.

$$T_u := \{ A : TA = -A \}$$ „ungerade" unter T.

$$= \left\{ \underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt},\ \underline{j} = \rho \underline{v},\ \underline{B},\ \underline{A} \dots \right\}$$

$$\underbrace{\underline{B}}_{T_u} = \underbrace{\nabla}_{T_g} \times \underbrace{\underline{A}}_{T_u}$$

Anwenden von T auf statische Grundgleichungen

$$T:\ C:\ \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \underline{E} = 0 \\ \varepsilon_0 \nabla \cdot \underline{E} = \rho \\ \nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j} \\ \nabla \cdot \underline{B} = 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\ \nabla \times \underline{E} = 0 \\ -\ \varepsilon_0 \nabla \cdot \underline{E} = -\rho \\ -\ -\nabla \times \underline{B} = -\mu_0 \underline{j} \\ -\ -\nabla \underline{B} = 0 \end{array} \right\}$$

invariant unter C ✓

invariant unter T

Kontinuitätsgleichung

$$T\ C \left\{ \dot\rho + \nabla \underline{j} = 0 \right\} \longrightarrow \left\{ -\dot\rho\ -\nabla \cdot \underline{j} = 0 \right\}$$ ✓ ✓

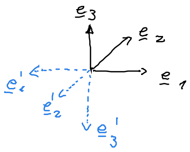
forminvariant unter T.

(ii) Ladungskonjugation

$C_g = \{ \underline{r}, \underline{v}, \underline{a}, \underline{F}, m \ldots \}$ gerade unter C

$C_u = \{ \underline{E}, \rho, \underline{j}, \underline{B} \ldots \}$ ungerade unter C

(iii) Paritätsumkehr (räumliche Spiegelung, Inversion)



Rechtssystem

Linkssystem

$P\underline{r} = -\underline{r}$ „polarer Vektor"

aber $P(\underline{a} \times \underline{b}) = -\underline{a} \times (-\underline{b}) = \underline{a} \times \underline{b}$ „axialer Vektor"

P - invariant

Seien $\underline{a}, \underline{b}$ polare
$\underline{\omega}, \underline{\sigma}$ axiale

$\rightarrow$ $\underline{a} \times \underline{\omega}$ polar

$\underline{a} \times \underline{b}$ axial
$\underline{\omega} \times \underline{\sigma}$ axial

$\underline{a} \cdot \underline{b}$ Skalar $P(\underline{a} \cdot \underline{b}) = \underline{a} \cdot \underline{b}$
$\underline{a} \cdot \underline{\omega}$ Pseudoskalar $P(\underline{a} \cdot \underline{\omega}) = -\underline{a} \cdot \underline{\omega}$

$P_g = \left\{ \begin{array}{ll} \text{skalare} & m, q \\ \text{axiale Vektoren} & \underline{B} \end{array} \right\}$ gerade

$P_u = \left\{ \begin{array}{ll} \text{Pseudoskalare} & \nabla \cdot \underline{B} \\ \text{polare Vektoren} & \underline{r}, d\underline{r}, \underline{v}, \underline{a}, \underline{F}, \underline{E}, \underline{j}, \underline{A} \end{array} \right\}$ ungerade

Grundgleichungen sind invariant unter P.

Idee: Forderungen an dynamische Gleichungen

(1) im statischen Grenzfall gelten bekannte Gleichungen

(2) Linear in $\underline{E}, \underline{B}$ (Superpositionsprinzip)
1. Ordnung in t (Kausalitätsprinzip)
zur Zeit $t=0$ soll Zustand für $t>0$ vollständig festgelegt sein

(3) CPT - Invarianz

Ansatz:
$$\nabla \times \underline{E} = a_1 \dot{\underline{E}} + b_1 \dot{\underline{B}}$$
$$\nabla \times \underline{B} - \mu_0 \underline{j} = a_2 \dot{\underline{E}} + b_2 \dot{\underline{B}}$$

Symmetrie: T_g oder P_g $\rightarrow$ $a_1 = 0$
T_u oder P_u $\rightarrow$ $b_2 = 0$

Wert von b_1 und a_2?