

6.5. Relativistisches Hamiltonprinzip

Ziel: Formulierung der Elektrodynamik als Lagrange'sche Feldtheorie.

d.h. Herleitung der Bewegungsgleichungen (Maxwell-Gl.) aus einer Lagrangeformale.

① • Die relativistische Dynamik eines freien Massenpunktes lässt sich aus dem Extremalprinzip herleiten.

$$\delta W = 0 \quad \left[W = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (\text{Wirkung}) \right]$$

$$W \sim \int_1^2 ds \quad \text{Wirkungsintegral, } ds = \frac{c}{\gamma} dt \quad \text{Lorentzinvariant}$$

t_1, t_2 : Anfangs- und Endpunkte im 4-Raum. $\delta x^\mu|_{t_1, t_2} = 0$



- Bedingungen:
- W muss Lorentz-Skalar sein
 - W darf Bahnlinie x^μ nicht explizit enthalten
 - linear im Potenzial
 - Grenzfall $\beta \ll 1$ muss Newtonsche Mechanik liefern

Newtonsche Mechanik im Limit $\beta \ll 1$

$$W = \alpha c \int_1^2 ds = \alpha c \int_{t_1}^{t_2} (1 - \beta^2)^{1/2} dt$$

$$\approx \alpha c \int_{t_1}^{t_2} \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) dt$$

$$\sqrt{1 - \beta^2} \approx 1 - \frac{1}{2}\beta^2$$

für $\alpha c = -m_0 c^2$ ergibt sich:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \left(\underbrace{-m_0 c^2}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{\frac{m_0}{2} v^2}_{\text{kinetische Energie}} \right) dt$$

$$L = -m_0 c^2 + \frac{m_0}{2} v^2$$

Lagrange-Funktion für freien Massenpunkt

② W eines Massenpunktes mit einem 4-Vektor-Feld $\varphi^\mu(x^\nu)$

$$W = \int_1^2 \left\{ -m_0 c ds - \underbrace{\varphi^\mu dx_\mu}_{\text{Lorentz-Invariant}} \right\}$$

← möglicher Ansatz

zu zeigen: Lorentz-Kraft stellt in der Bewegungsgleichung

Variation: $\delta W = \int_1^2 \left\{ -m_0 c \delta(ds) - \delta(\varphi^\mu dx_\mu) \right\}$ (I)

$$\delta(ds) = \delta(dx^\mu dx_\mu)^{1/2} = \frac{1}{2} \frac{d(\delta x^\mu) dx_\mu + dx^\mu d(\delta x_\mu)}{ds}$$

$$\left[\begin{array}{l} v := \frac{dx^\mu}{ds} \\ u^\mu := \frac{dx^\mu}{ds} \end{array} \right]$$

4-Geschwindigkeit

$$= \frac{dx^\mu}{ds} d(\delta x_\mu) \stackrel{\textcircled{1}}{=} u^\mu d(\delta x_\mu)$$

$$\left[(d(\delta x^\mu)) dx_\mu = dx^\mu (d(\delta x_\mu)) \right]$$

(I): $\delta(\varphi^\mu dx_\mu) = \delta\varphi^\mu dx_\mu + \varphi^\mu d(\delta x_\mu)$

$$\Rightarrow \delta W = \int_1^2 \left\{ \underbrace{-m_0 c u^\mu d(\delta x_\mu)}_{\textcircled{1}} - \underbrace{\delta\varphi^\mu dx_\mu}_{\textcircled{2}} - \underbrace{\varphi^\mu d(\delta x_\mu)}_{\textcircled{3}} \right\}$$

$$\int u^\nu = [u^\nu] - [u^\nu]$$

Partielle Integration: $\int_1^2 [-m_0 c u^\mu \delta x_\mu]_1^2 + \int_1^2 m_0 c (d u^\mu) \delta x_\mu = - \int_1^2 m_0 c u^\mu d(\delta x_\mu)$

$\int_1^2 [-\varphi^\mu \delta x_\mu]_1^2 + \int_1^2 (d\varphi^\mu) \delta x_\mu = - \int_1^2 \varphi^\mu d(\delta x_\mu)$

da Anfangs- und Endpunkte nicht variieren $\rightarrow 0$

$\textcircled{3}: dq^\mu = \partial^\nu \varphi^\mu dx_\nu$ (totales Differential)
 $= \partial^\nu \varphi^\mu u_\nu ds$

$$\delta q^\mu = \partial^\nu \varphi^\mu \delta x_\nu \rightarrow \boxed{\delta q^\mu dx_\mu} = \partial^\nu \varphi^\mu \delta x_\nu dx_\mu \stackrel{\mu \leftrightarrow \nu}{=} \partial^\mu \varphi^\nu \delta x_\mu dx_\nu = \partial^\mu \varphi^\nu u_\nu \delta x_\mu ds$$

Einsetzen von $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$

$$\Rightarrow \delta W = \int_1^2 ds \left\{ m_0 c \frac{du^\mu}{ds} - (\partial^\mu \varphi^\nu - \partial^\nu \varphi^\mu) u_\nu \right\} \delta x_\mu$$

da $\delta W = 0$ für beliebige Variationen von δx_μ gilt, folgt:

$$\boxed{m_0 c \frac{du^\mu}{ds} = (\partial^\mu \varphi^\nu - \partial^\nu \varphi^\mu) u_\nu = f^{\mu\nu} u_\nu}$$

$f^{\mu\nu} := \partial^\mu \varphi^\nu - \partial^\nu \varphi^\mu$

rel. Bewegungsgleichung eines Massenpunktes mit Ruhemasse m_0 und Ladung q unter dem Einfluss der Lorentzkraft.

wir kennen: $p^\mu = m_0 c u^\mu$

wir setzen: $f^{\mu\nu} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu}$ (Feldstärketensor)
 $\varphi^\mu = \frac{q}{c} \phi^\mu$ (4-Potenzial)

$$\frac{d}{ds} p^\mu = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu$$

• die 3 Ortskomponenten:

$$\frac{d}{ds} p^i = \frac{q}{c} \left(F^{i0} u_0 + F^{i1} u_1 + F^{i2} u_2 + F^{i3} u_3 \right)$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ E^i & \gamma & 0 & -c B^3 \frac{\gamma}{c} v_2 \quad c B^2 \frac{\gamma}{c} v_3 \end{matrix}$$

$$ds = \frac{c}{\gamma} dt$$

$$= \frac{q}{c} \left(\gamma E^i - c B^2 \frac{\gamma}{c} v_2 + c B^3 \frac{\gamma}{c} v_3 \right)$$

$$\frac{d}{ds} p^i = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu$$

ABER: Linke Seite enthält die bewegte Masse.

$$\frac{d}{dt} (p)_i = q \left((E)_i + (v \times B)_i \right) \quad (v_z B_3 - v_3 B_z = (v \times B)_i)$$

• bekannte Bewegungsgleichung mit Lorentzkraft.

• Zeitkomponente ergibt $\mu=0$

$$\frac{\gamma}{c} \frac{dE}{dt} = \frac{d}{ds} \left(\frac{E}{c} \right) = \frac{q}{c} \left(F^{01} u_1 + F^{02} u_2 + F^{03} u_3 \right)$$

$$= \frac{q}{c} \frac{\gamma}{c} \left(E^1 v^1 + E^2 v^2 + E^3 v^3 \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{E \cdot v}$

• v_{rel} -Variable Geschw.

$$\frac{dE}{dt} = q E \cdot v$$

Leistungsbilanz

(nur elektrisches Feld ändert die Energie)

⇒

$$\delta W = \delta \int_1^2 \underbrace{\left(-m_0 c ds - \frac{q}{c} \phi^\mu dx_\mu \right)}_{L dt = (L_{\text{Teil}} + L_{\text{rel-masse}}) dt} = 0$$

ergibt Bewegungsgl. und Leistungsbilanz

$$L_{\text{rel-masse}} dt = -\frac{q}{c} \phi^\mu dx_\mu = (-q \phi - q v \cdot A) dt$$

$$L_{\text{rel-masse}} = -q \phi - q v \cdot A \quad \text{Lagrange-Funktion}$$

6.6. Eichinvarianz und Ladungserhaltung

Wirkungsintegral

$$W = \underbrace{-m_0 c \int_1^2 ds}_{W_E \text{ (Teilchen)}} - \underbrace{\frac{q}{c} \int_1^2 dx_\nu \phi^\nu}_{W_{E\dot{\phi}} \text{ (Teilchen-Feld-WW)}}$$

Verallgemeinerung auf kont. Massendichte $\mu(x^\nu)$:

$$W_E = -c \int d^3r \mu \int_1^2 ds = - \int_{\Omega} d\Omega \mu \frac{ds}{dt}$$

$$d\Omega := d^3r c dt = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \quad \text{Volumenelement im Minkowski-Raum}$$

(i) $d\Omega$ ist eine Lorentz-Invariante, da das Volumen unter orthogonalen Transformationen U^{ν}_{κ} erhalten wird.

$$(ii) \quad dm_0 dx^{\nu} = \frac{\mu}{c} \frac{dx^{\nu}}{dt} \underbrace{d^3r c dt}_{d\Omega} = \frac{1}{c} \mu \frac{dx^{\nu}}{dt} d\Omega$$

\Rightarrow die 4-er Massenstromdichte $\mu \frac{dx^{\nu}}{dt} \equiv j^{\nu}$ ist ein 4-Vektor, da $dm_0, d\Omega$ Lorentz Skalare sind

$$(iii) \quad \underbrace{\mu^2 \frac{dx^{\nu} dx_{\nu}}{dt^2}}_{g^{\nu} g_{\nu}} = \left(\mu \frac{ds}{dt} \right)^2 \quad \text{ist Lorentz-Invariante} \quad \text{also auch} \quad \mu \frac{ds}{dt}$$

$\Rightarrow W_E$ ist Lorentz-Invariante.

WW einer kontinuierlichen Ladungsverteilung $\rho(x^{\nu})$ mit Feld:

$$W_{\text{eff}} = -\frac{1}{c} \int d^3r \rho \int dx_{\nu} \phi^{\nu}$$

$$\boxed{W_{\text{eff}} = -\frac{1}{c} \int_{\Omega} d\Omega j_{\nu} \phi^{\nu}}$$