

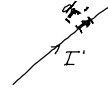
## 2.3. Magnetostatische Feldgleichungen

Wdh: 
$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3r' \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}$$

für Leiter

$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L'} d\underline{r}' \times \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}$$

Biot-Savart-Gesetz  
(1820)



Mit dem Vektorpotenzial  $\underline{A}(\underline{r})$

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

lässt sich

Schreiben: 
$$\underline{B}(\underline{r}) = \text{rot } \underline{A}(\underline{r})$$

Bem:  $\underline{A}$  ist nicht eindeutig

Umrechnung  
 $\underline{A} \rightarrow \underline{A} + \nabla \varphi$  mit  
bel.  $\varphi$

da  $\nabla \times \nabla \varphi = \underline{0}$   
 $\text{rot}(\text{grad } \varphi) = \underline{0}$

Beweis: 
$$\nabla \times \underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3r' \nabla_r \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \times \underline{j}(\underline{r}')$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{(\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} = \underline{B}$$

Folgendes ist äquivalent:

(i)  $\underline{B}(\underline{r}) = \text{rot } \underline{A}$

↕

(ii)  $\text{div } \underline{B} = 0 \iff$  es gibt keine magnetischen "Ladungen", keine Quellen der magu. Induktion

Zusammenhang zwischen  $\underline{B}$  und  $\underline{j}$ ?

$$\text{rot } \underline{B} = \nabla \times (\nabla \times \underline{A}) = \nabla (\underbrace{\nabla \cdot \underline{A}}_{\text{grad}(\text{div } \underline{A})}) - \underbrace{\Delta \underline{A}}_{\text{②}}$$

①: 
$$\nabla \cdot \underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \nabla_r \left( \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \underline{j}(\underline{r}') \underbrace{\nabla_r \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|}}_{-\nabla_r' \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|}}$$

Produktregel

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \left[ \underbrace{-\nabla_r' \left( \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right)}_{\text{Satz von Gauß}} + \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \underbrace{\nabla_r' \cdot \underline{j}(\underline{r}')}_{\text{Kontinuitätsgleichung}} \right]$$

$$\nabla \cdot \underline{j} + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S(r \rightarrow \infty)} d\vec{l}' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{\mu_0 \epsilon_0 \phi(\vec{r}, t)}$$

$\downarrow$   
 $\circ$  für hinreichend rasch abfallende Ströme  $\vec{j}(\vec{r}')$

$\Rightarrow$

$$\nabla(\nabla \cdot \underline{A}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi = \underline{\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}}$$

$$\textcircled{2} \quad \Delta \underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \underbrace{\Delta \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{-4\pi \delta(\vec{r}-\vec{r}')} = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t)$$

Also zusammengefasst:

$\text{rot } \underline{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}$

$\nwarrow$  Verschiebungsstromdichte

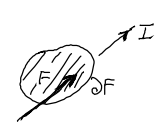
Für stationäre Strom + Ladungsverteilungen

$$\textcircled{3} \quad \boxed{\text{rot } \underline{B} = \mu_0 \vec{j}}$$

differenzielle Form des Amperes Gesetzes  
Ampèresches Durchflutungsgesetz

Ströme sind die Wirbel der magn. Induktion.

Integration über Fläche F:

$$\int_F d\vec{l}' \text{rot } \underline{B} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint_{\partial F} ds \underline{B} \stackrel{\textcircled{3}}{=} \underbrace{\mu_0 \int_F d\vec{l}' \vec{j}(\vec{r}')}_{I \text{ Strom durch Fläche}} \Rightarrow \oint_{\partial F} ds \underline{B}(\vec{r}) = \mu_0 I$$


Zusammenfassung

Magnetostatik

Elektrostatik

$\text{div } \underline{B} = 0$   
 $\Updownarrow$   
 $\text{rot } \underline{A} = \underline{B}$

$\hat{=}$  queltfrei

wirbelfrei  $\hat{=}$

$\text{rot } \underline{E} = 0$   
 $\Updownarrow$   
 $\underline{E} = -\nabla \phi$

$$\begin{aligned} \text{rot } \underline{E} &= \mu_0 \underline{j} \\ \Downarrow \\ \int_{\partial F} d\underline{s} \times \underline{E} &= \mu_0 I \end{aligned}$$

Ampère'sches  
Umschließungsgesetz

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \text{div } \underline{E} &= \rho \\ \Downarrow \\ \epsilon_0 \int_{\partial V} d\underline{s} \cdot \underline{E} &= Q \end{aligned}$$

Gauß'sches Gesetz

$$\Downarrow$$

$$\Delta \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}(\underline{r})$$

gilt nur falls  $\text{div } \underline{A} = 0$   
d.h. in Coulomb Eichung  
(Umwicklung  $\underline{A}' = \underline{A} + \nabla \psi(\underline{r})$ )

$$\Downarrow$$

$$\Delta \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\underline{r})$$

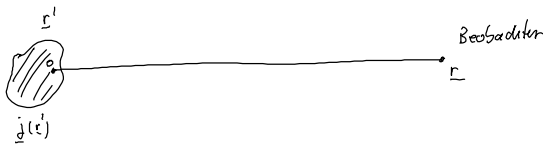
Poissongl.

Bem: Magnetostatik und Elektrostatik sind entkoppelt.

### 2.4. Magnetische Multipole

Ausgangspunkt:  $\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$

Lösung von  $\Delta \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}(\underline{r})$   
in Coulomb Eichung für  
RB  $\underline{A} \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$



$$r' \ll r$$

$$\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{(\underline{r} \cdot \underline{r}')}{r^3} + \dots$$

Taylorentwicklung um  $|\underline{r}'| = 0$   $r = |\underline{r}|$

$$\Rightarrow \underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \underline{j}(\underline{r}') + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' (\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{j}(\underline{r}') + \dots$$

↑  
Monopolterm
↑  
Dipolterm

Monopolterm:  $\nabla_{r'} \cdot (\underline{r}' \cdot \underline{j}(\underline{r}')) = \underbrace{x_k' (\nabla_{r'} \cdot \underline{j})}_0 + \underbrace{\underline{j} \cdot (\nabla_{r'} x_k')}_{j_k \delta_{kl}} = j_k$

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \mathbf{j}_k(\mathbf{r}') = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \nabla_{r'} [X_k \mathbf{j}] = \int_{S(\infty)} d\mathbf{f} \cdot X_k \mathbf{j} = 0$$

→ Monopolterm verschwindet!

Dipolterm:  $(\mathbf{r}' \times \mathbf{j}) \times \mathbf{r} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{r}'$

$$= 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j} - \underbrace{[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{r}']}_{\substack{a \times (b \times c) = \\ b(ac) - c(ab)}}$$

$$\nabla_{r'} [X_k (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}] = [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}_k + X_k (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}) + X_k (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \underbrace{\nabla_{r'} \mathbf{j}}_0]$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \nabla_{r'} [X_k (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}] = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}_k + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}) X_k] = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{f} \cdot X_k (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}$$

↓  
0 da  $\mathbf{j} \rightarrow 0$  für  $r' \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \underline{A}^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')) \times \mathbf{r} \quad \text{Dipolterm}$$

magnetische Dipolmoment

$$\underline{m} := \frac{1}{2} \int d^3r' \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')$$



$$\underline{A}^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \underline{m} \times \mathbf{r}$$

Vergleiche elektrische Dipolmoment

$$\underline{p} := \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}')$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^3} \underline{p} \cdot \mathbf{r}$$

$$E^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^5} [3(\underline{p} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} - r^2 \underline{p}]$$

Magnetische Induktion des Dipolpotenzials

$$\underline{B}(\mathbf{r}) = \text{rot } \underline{A}(\mathbf{r}) = \text{rot} \left[ \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \underline{m} \times \mathbf{r} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^5} [3(\underline{m} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} - r^2 \underline{m}]$$

wegen  $\text{rot}(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_2 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 (\nabla \cdot \mathbf{v}_2) - \mathbf{v}_2 (\nabla \cdot \mathbf{v}_1)$

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\underline{m}}{r^3} \quad \text{div } \mathbf{v}_1 = -\frac{3\underline{m} \cdot \mathbf{r}}{r^5}$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{r} \quad \text{div } \mathbf{v}_2 = 3$$

$$(\mathbf{v}_2 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 = -3\underline{m} \frac{r^2}{r^5}, \quad (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_2 = \frac{\underline{m}}{r^3}$$