English Summary:

Field tensor $\boxed{F^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi^\nu - \partial^\nu \phi^\mu}$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -cB^3 & cB^2 \\ E^2 & cB^3 & 0 & -cB^1 \\ E^3 & -cB^2 & cB^1 & 0 \end{pmatrix}$$

homogeneous Maxwell's eqs. $\boxed{\epsilon_{\mu\nu\lambda\kappa} \partial^\nu F^{\lambda\kappa} = 0}$

(4 - curl)

Levi-Civita tensor

Inhomogene Maxwell-glg. (im Vakuum)

(3) $\epsilon_0 \underline{\nabla} \cdot \underline{E} = \varrho$

$\Leftrightarrow \partial_1 E^1 + \partial_2 E^2 + \partial_3 E^3 = \frac{1}{\epsilon_0 c} c\varrho$

$\Leftrightarrow \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^0$

$\Leftrightarrow \boxed{\partial_\mu F^{\mu 0} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^0}$ da $\partial_0 F^{00} \equiv 0$ $\mu = 0,1,2,3$

(4) $\underline{\nabla} \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}$

1. Komponente:

$\partial_2 B^3 - \partial_3 B^2 = \mu_0 j^1 + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} E^1$

mit $\mu_0 c = \frac{1}{\epsilon_0 c}$:

$\Leftrightarrow \partial_2 F^{21} - \partial_3 F^{13} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^1 + \partial_0 F^{10}$

$$\Leftrightarrow \partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\partial_\mu F^{\mu 1} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^1} \qquad \text{da } \partial_1 F^{11} \equiv 0$$

analog für 2. und 3. Komponente!

Zusammenfassung der inhomog. Maxwellgln.:

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^\nu} \qquad (\text{„}\underline{4\text{-Divergenz}}\text{"})$$

<u>Bem.</u>: (i) Die homog. Maxwell-Gln. sind durch den Potenzialansatz

$$F_{\lambda\kappa} = \partial_\lambda \phi_\kappa - \partial_\kappa \phi_\lambda$$

automatisch erfüllt:

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} \partial_\nu F_{\lambda\kappa} = \underbrace{\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} \partial_\nu \partial_\lambda \phi_\kappa}_{! = 0} - \underbrace{\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} \partial_\nu \partial_\kappa \phi_\lambda}_{! = 0} \overset{!}{=} 0$$

infolge der Antisymmetrie von $\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}$ $(\nu \leftrightarrow \lambda)$

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} \partial_\nu \partial_\lambda \phi_\kappa = -\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} \partial_\nu \partial_\lambda \phi_\kappa$$

(ii) Aus den inhomog. Maxwell-Gln.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu \phi^\nu - \partial_\mu \partial^\nu \phi^\mu = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^\nu \qquad \nu = 0,1,2,3$$

folgt mit der Lorenz-Eichung $\partial_\mu \phi^\mu = 0$

$$\partial_\mu \partial^\nu \phi^\mu = \partial^\nu \partial_\mu \phi^\mu = 0$$

Also

$$\boxed{\partial_\mu \partial^\mu \phi^\nu = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^\nu} \qquad \underline{\text{inhomog. Wellengl.}}$$

(iii) Die Maxwell-Gln.

$$\boxed{\begin{aligned} \epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} \partial_\nu F_{\lambda\kappa} &= 0 \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{1}{\epsilon_0 c} j^\nu \end{aligned}}$$

sind <u>Lorentz-kovariant</u>, weil sie durch 4-Vektoren ausgedrückt sind.

6.3 Relativistisches Hamilton-Prinzip

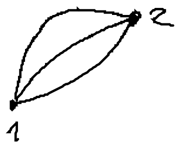
<u>Ziel</u>: Formulierung der Elektrodynamik als Lagrange'sche Feldtheorie

Die relativist. Dynamik eines freien Massenpunktes lässt sich aus dem Extremalprinzip

$$\delta W = 0 \,, \qquad W \sim \int_1^2 ds \qquad \text{(Wirkungsintegral)}$$

$$ds = \frac{c}{\gamma}\, dt \quad \text{lorentzinvariant}$$

herleiten, wobei 1 und 2 Anfangs- und End-Ereignis im 4-Raum sind und $\delta x^\mu \big|_{1,2} = 0$



Newton'sche Mechanik ist Grenzfall für $\beta \ll 1$:

$$\Rightarrow \quad W = -m_0 c \int_1^2 ds = -m_0 c^2 \int_{t_1}^{t_2} (1-\beta^2)^{1/2}\, dt$$

$$\approx \int \underbrace{\left(-m_0 c^2 + \frac{m_0}{2} v^2\right)}_{L \quad \text{Lagrange-Fkt.}} dt$$

WW eines Massenpunktes mit einem 4-Vektor-Feld $\varphi^\mu(x^\nu)$

$$\Rightarrow \quad W = \int_1^2 \{ \underbrace{-m_0 c\, ds}_{} \; \underbrace{- \varphi^\mu dx_\mu}_{} \}$$

Lorentz-Invarianten

Variation:

$$\delta W = \int_1^2 \{ -m_0 c\, \delta(ds) - \delta(\varphi^\mu dx_\mu) \}$$

mit $\delta(ds) = \delta\left(dx^\mu dx_\mu\right)^{1/2} = \frac{1}{2} \frac{d(\delta x^\mu) dx_\mu + dx^\mu (d\,\delta x_\mu)}{ds}$

$$\left[(d\,\delta x^\mu) dx_\mu = dx^\mu (d\,\delta x_\mu) \right]$$

$$= \frac{dx^\mu}{ds} d(\delta x_\mu) = u^\mu\, d(\delta x_\mu)$$

und $\delta(\varphi^\mu dx_\mu) = \delta\varphi^\mu dx_\mu + \varphi^\mu d(\delta x_\mu)$

$$\Rightarrow \delta W = \int_1^2 \{-m_0 c\, u^\mu d(\delta x_\mu) - \delta\varphi^\mu dx_\mu - \varphi^\mu d(\delta x_\mu)\} \qquad (*)$$

Part. Integr. $\underbrace{\underbrace{\left[-m_0 c u^\mu \delta x_\mu\right]_1^2}_{=0 \text{ weil } \delta x_\mu|_{1,2}=0} + \int_1^2 m_0 c\, du^\mu \delta x_\mu}_{\int_1^2 ds\, m_0 c \frac{du^\mu}{ds}\delta x_\mu}$ $\qquad \underbrace{-\left[\varphi^\mu \delta x_\mu\right]_1^2}_{0} + \int d\varphi^\mu \delta x_\mu$

Mit $d\varphi^\mu = \partial^\nu \varphi^\mu dx_\nu = \partial^\nu \varphi^\mu u_\nu ds$

$\delta\varphi^\mu = \partial^\nu\varphi^\mu \delta x_\nu$

$\delta\varphi^\mu dx_\mu = \partial^\nu \varphi^\mu \delta x_\nu dx_\mu \overset{\mu\leftrightarrow\nu}{=} \partial^\mu \varphi^\nu \delta x_\mu dx_\nu = \partial^\mu\varphi^\nu u_\nu \delta x_\mu ds$

Einsetzen in $(*)$:

$$\delta W = \int_1^2 ds \left\{m_0 c \frac{du^\mu}{ds} - \left(\partial^\mu\varphi^\nu - \partial^\nu\varphi^\mu\right) u_\nu\right\}\delta x_\mu$$

Da $\delta W = 0$ für bel. Variation δx_μ gilt, folgt:

$$\boxed{m_0 c \frac{du^\mu}{ds} = f^{\mu\nu} u_\nu} \quad \text{mit} \quad \boxed{f^{\mu\nu} := \partial^\mu\varphi^\nu - \partial^\nu\varphi^\mu}$$

relativist. Beweg.gl. eines Massenpunktes der Ruhemasse m_0, Ladung q unter dem Einfluss der Lorentzkraft.

Setze hierzu $p^\mu = m_0 c u^\mu$ 4-Impuls

$$f^{\mu\nu} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} = \frac{q}{c}\left(\partial^\mu\phi^\nu - \partial^\nu\phi^\mu\right)$$

$$\varphi^\mu = \frac{q}{c}\phi^\mu$$

$$\boxed{\frac{d}{ds} p^\mu = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu} \Leftrightarrow \boxed{\delta W = \delta \int_1^2 \left\{-m_0 c\, ds - \frac{q}{c}\phi^\mu dx_\mu\right\} = 0}$$

Lagrange-Fkt. $L_{\text{Feld-Materie}}\, dt = (-q\phi - q\underline{v}\cdot\underline{A})\, dt$

$= -\frac{q}{c}\phi^\mu dx_\mu$

Die Ortskomp $i=1,2,3$ stimmen mit

$$\boxed{\frac{d}{dt}\underline{p} = q\left(\underline{E} + \underline{v}\times\underline{B}\right)}$$

überein, denn mit $u^0 = \gamma$, $u^i = \frac{\gamma}{c} v^i = -u_i$ folgt

$$\frac{d}{dt}p^1 = q\left(E^1 + v^2 B^3 - v^3 B^2\right)$$

$$= q\left(F^{10} + F^{21}\frac{1}{c}v^2 - F^{13}\frac{1}{c}v^3\right)$$

$$= \frac{q}{\gamma}\left(F^{10}\gamma - F^{12}\frac{\gamma}{c}v^2 - F^{13}\frac{\gamma}{c}v^3\right)$$

$$= \frac{q}{\gamma}\left(F^{1\mu}u_\mu\right)$$

also mit $ds = \frac{c}{\gamma}dt$:

$$\frac{d}{ds}p^1 = \frac{q}{c}F^{1\mu}u_\mu$$ Newton mit Lorentzkraft

Die zeitartige Komponente $\mu=0$ gibt wegen $p^0 = \frac{E}{c}$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{E}{c}\right) = \frac{\gamma}{c^2}\frac{dE}{dt} = \frac{q}{c}\left(F^{01}u_1 + F^{02}u_2 + F^{03}u_3\right)$$

$$= q\frac{\gamma}{c^2}\left(E^1v^1 + E^2v^2 + E^3v^3\right)$$

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = q\,\underline{E}\cdot\underline{v}}$$ Leistungsbilanz