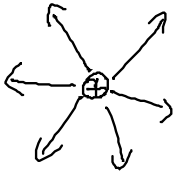


# Poisson-Gleichung



## Quellen des elektrischen Feldes

Punktladung  $q$  bei  $\underline{r}' = 0$

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\underline{r}}{r^3}$$

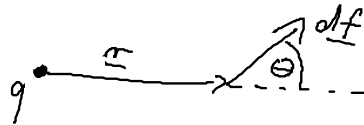
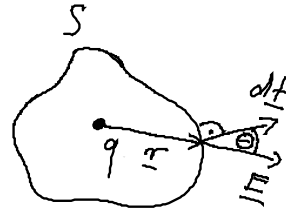
Elektrischer Kraftfluss durch eine geschlossene Oberfläche  $S$  um  $q$

$$\oint_S \underline{d}\underline{f} \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\underline{d}\underline{f} \cdot \underline{r}}{r^3}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\oint_S d\Omega}_{4\pi}$$

$$= \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\epsilon_0 \oint \underline{d}\underline{f} \cdot \underline{E}(\underline{r}) = q}$$



$$d\underline{f} \cdot \cos \Theta$$

$$= r^2 d\Omega$$

$$\Rightarrow \underline{d}\underline{f} \cdot \underline{r} = d\underline{f} \cdot r \cos \Theta$$

$$= r^3 d\Omega \quad (*)$$

Verallgemeinerung auf kontinuierliche Ladungsverteilung:

$$\boxed{\epsilon_0 \oint_{\partial V} \underline{d}\underline{f} \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \int_V d^3r' \rho(\underline{r}')$$

für beliebige Volumen  $V$ .



Integralform des Coulomb-Gesetzes  
(Gauß'sches Gesetz)

## Gauß'scher Integralsatz

$$\oint_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \int_V d^3\underline{r}' \operatorname{div} \underline{E}(\underline{r}') \quad (\text{einfach zus. Gebiete } V)$$

$$\Rightarrow \int_V d^3\underline{r}' \epsilon_0 \operatorname{div} \underline{E}(\underline{r}') = \int_V d^3\underline{r}' g(\underline{r}') \quad \text{gilt für bel. zus.-häng. Gebiete } V.$$

$$\Rightarrow \boxed{\epsilon_0 \operatorname{div} \underline{E}(\underline{r}) = g(\underline{r})}$$

differentielle Form des Gauß'schen Gesetzes

Die el. Ladungen sind Quellen des el. Feldes.

## Grundgleichungen der Elektrostatik

(i)  $\underline{E}(\underline{r})$  besitzt ein skalares Pot.:  $\underline{E}(\underline{r}) = -\underline{\nabla} \phi(\underline{r})$



(ii)  $\boxed{\operatorname{rot} \underline{E}(\underline{r}) = 0}$   $\underline{\nabla} \times \underline{E} = 0$  statisches E-Feld ist wirbelfrei



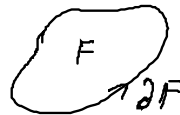
(iii)  $\int_1^2 \underline{E} \cdot d\underline{s}$  wegunabhängig



(iv)  $\oint \underline{E} \cdot d\underline{s} = 0$

Beweis (ii)  $\Leftrightarrow$  (iv) mit Hilfe des Stokes'schen Satzes:

$$\oint_{\partial F} \underline{E} \cdot d\underline{s} = \int_F \operatorname{rot} \underline{E} \cdot d\underline{f}$$



$$\oint \underline{E} \cdot d\underline{s} = 0 \Rightarrow \text{(iv)} \Rightarrow \text{(iii)}$$

(iv)  $\oint \underline{E} \cdot d\underline{s} = 0 \Rightarrow \int \operatorname{rot} \underline{E} \cdot d\underline{f} = 0$  gilt für bel. F

$$\Rightarrow \operatorname{rot} \underline{E} = 0 \quad \square$$

### Arbeit im el. Feld

Arbeit, um Ladung  $q$  von  $\underline{r}_1 \rightarrow \underline{r}_2$  zu verschieben:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{E}(\underline{r}) \cdot d\underline{s} = q \int_1^2 \underline{E} \cdot d\underline{s} = -q \int_1^2 d\underline{s} \cdot \underline{\nabla} \phi \\ &= -q \int_1^2 d\phi \\ &= q \cdot [\phi(\underline{r}_1) - \phi(\underline{r}_2)] \end{aligned}$$

Potenzialdifferenz = el. Spannung

### 1.3. Poisson-Gleichung und Green'sche Fkt.

$$\underline{E} = -\underline{\nabla} \phi \text{ eingesetzt in } \underline{\nabla} \cdot \underline{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\underline{r})} \quad \text{Poisson-Gl.}$$

$$\Delta: \text{Laplace-Operator} \quad \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} \stackrel{\text{kart. Koord.}}{=} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

part. DGL zur Berechnung des el. Pot. für vorgegebene Ladungsverteilung.

Eindeutig durch Randbedingungen:

(i)  $\phi(\underline{r}) \rightarrow 0$  hinreichend rasch für  $|\underline{r}| \rightarrow \infty$ .  
oder


(ii)  $\phi(\underline{r})$  sei gegeben auf Leiteroberflächen im Endlichen.

Lösung zu (i):  $\phi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\rho(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|}$   
 (rasch abfallendes  $\rho$ )

eingesetzt:

$$\Delta \phi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\underline{x}') \Delta_r \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \quad (1)$$

a) für  $\underline{x}' \neq \underline{x}$ :

$$\begin{aligned} \Delta_r \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} &= \nabla_r \cdot \nabla_r \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} = -\nabla_r \cdot \frac{\underline{x} - \underline{x}'}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} \\ &= -\frac{\nabla_r \cdot (\underline{x} - \underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} - (\underline{x} - \underline{x}') \cdot \nabla_r \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} \end{aligned}$$


$$\nabla \cdot \underline{x} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 3$$

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\underline{x}}{r^3}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{3}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} + 3(\underline{x} - \underline{x}') \cdot \frac{\underline{x} - \underline{x}'}{|\underline{x} - \underline{x}'|^4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

b)  $\underline{x}' \in V$

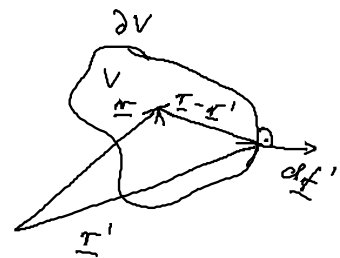
$$\int_V d^3r' \Delta_r \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} = - \int_V d^3r' \nabla_{r'} \cdot \nabla_r \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|}$$

Gauß'scher Satz

$$= - \int_{\partial V} df' \cdot \nabla_r \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|}$$

$$= \int_{\partial V} df' \cdot \frac{\underline{x} - \underline{x}'}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3}$$

$$= - \oint d\Omega$$



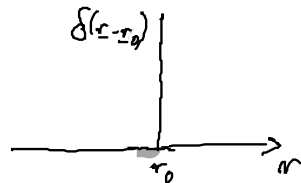
$$= \begin{cases} -4\pi & \text{für } \underline{r}' \in V \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Erg.:  $\Delta_{\underline{r}} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = -4\pi \delta(\underline{r}-\underline{r}')$

Dirac'sche  $\delta$ -Funktion ( $\delta$ -Distribution)

$$\int_V d^3r \delta(\underline{r}-\underline{r}_0) = \begin{cases} 1, & \underline{r}_0 \in V \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\delta(\underline{r}-\underline{r}_0) = 0 \quad \forall \underline{r} \neq \underline{r}_0$$



$$\int_V d^3r f(\underline{r}) \cdot \delta(\underline{r}-\underline{r}_0) = f(\underline{r}_0)$$

Poisson-Gleichung:

$$\Delta \phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' g(\underline{r}') \Delta_{\underline{r}} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$= \frac{-4\pi}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' g(\underline{r}') \delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

$$= -\frac{1}{\epsilon_0} g(\underline{r}) \quad \text{Poisson-Gleichung ist erfüllt!}$$

Physikalische Interpretation von  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Delta_{\underline{r}} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\underline{r}-\underline{r}')$

$$\Rightarrow \text{Coulomb-Pot } \phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

ist die Lösung der Poisson-Gl. im ganzen  $\mathbb{R}^3$   
für eine Pkt.-Ladung  $q=1$  bei  $\underline{r}'$

Green'sche Fkt.

Allg. Methode zur Lösung inhomogener (part. oder gew.)  
Dgl. für gegebene Inhomogenitäten.

- z. B. - gedämpfte getriebene harm. Osz.  
- Poisson-Gl.  
- Wellenl.  
- Streutheorie  
- Wärmeleitung

Strategie:

(i) Zuerst Lösung der Dgl für  $\delta$ -förmige Inhomogenität

$$\Delta_r G(\underline{r}-\underline{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

d. h. Green'sche Fkt. ist Lösung für Pkt.-Ladung  $q=1$  bei  $\underline{r}'$

Für Randbed.  $\phi \rightarrow 0$  ( $|\underline{r}| \rightarrow \infty$ ) ist

$$G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

(ii) Dann Lösung für bel. Inhomogenität  $g(\underline{r})$   
durch Faltung mit der Greens-Fkt.

$$\Rightarrow \boxed{\phi(\underline{r}) = \int d^3r' G(\underline{r}-\underline{r}') \cdot g(\underline{r}')$$