

English Summary:

Retarded potentials

$$\square u = -f(\underline{r}, t) \Rightarrow u(\underline{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') f(\underline{r}', t')$$

$$(u = \phi \Rightarrow f = \rho / \epsilon_0)$$

$$(u = \underline{A} \Rightarrow f = \mu_0 \underline{j})$$

$$\text{causal Green's fct.: } G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = \begin{cases} \frac{1}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|} \delta(t-t' - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}) & t > t' \\ 0 & t < t' \end{cases}$$

$$\square G = -\delta(\underline{r}-\underline{r}') \delta(t-t')$$

4.3 Multipolstrahlung

Ziel: Die retardierten Potentiale sollen für räumlich lokalisierte zeitabhängige Ladungs- u. Stromverteilungen analog zu den stat. Multipolentwicklungen (§1.4, 2.4) für $r \gg r'$ entwickelt werden.

Var.: Lorenz-Eichung $\dot{\phi} + c^2 \nabla \cdot \underline{A} = 0$ $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$
 $\Rightarrow \underline{A}(\underline{r}, t)$ ergibt $\phi(\underline{r}, t)$ u. somit $\underline{E}(\underline{r}, t), \underline{B}(\underline{r}, t)$

1. Näherung: $r \gg a$ (Ausdehnung der Quelle)

$$\text{Mit } \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} (\underline{r} \cdot \underline{r}') + \dots$$



$$\underline{A}(\underline{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \underline{j}(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}) + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' (\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{j}(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c})$$

$$\text{2. Näherung: } t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c} \approx \underbrace{t - \frac{r}{c}}_{=: \tau} + \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{cr} + \dots$$

$$\text{falls } \tau \gg \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{cr} \sim \frac{a}{c} \text{ (relative Retardierung innerhalb der Quelle)}$$

$a \sim$ Ausdehnung der Quelle

$\tau \sim$ charakt. Retardierungszeit Beob. - Schwerpunkt der Quelle

(z.B. harmon. Erregung $\underline{j} \sim e^{i\omega t}$:
 $\omega r \stackrel{!}{=} 2\pi \Rightarrow r = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{ck} = \frac{\lambda}{c}$ Periode

$a \ll \lambda$ Wellenlänge

$$\Rightarrow \underline{j}(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}) \approx \underline{j}(\underline{r}', t - \frac{r}{c}) + \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{cr} \frac{\partial \underline{j}(\underline{r}', \tau)}{\partial \tau} + \dots$$

$$\Rightarrow \underline{A}(\underline{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3r' \underline{j}(\underline{r}', \tau) + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int d^3r' (\underline{r} \cdot \underline{r}') (1 + \frac{r}{c} \frac{\partial}{\partial \tau}) \underline{j}(\underline{r}', \tau)$$

niedrigste Ordnung (verschwindet nicht, da im Gegensatz zur Magnetostatik $\nabla \cdot \underline{j} \neq 0$)

Mit $\nabla_r \cdot [\underline{x}'_k \underline{j}] = \underline{x}'_k (\nabla_r \cdot \underline{j}(\underline{r}', \tau)) + \underline{j}_k$ mit $\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \nabla_r \cdot (\underline{x}'_k \underline{j}) \stackrel{\text{Gauß}}{=} 0$
 $-\dot{q}(\underline{r}', \tau)$

folgt $\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \underline{j}(\underline{r}', \tau) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \underline{r}' \dot{q}(\underline{r}', \tau) = \dot{\underline{p}}(\tau)$

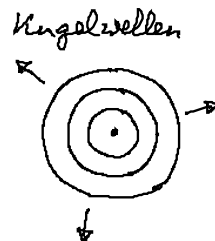
mit el. Dipolmoment $\underline{p} = \int d^3r' \underline{r}' q(\underline{r}', \tau)$

$$\Rightarrow \underline{A}^{(1)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\underline{p}}(t - \frac{r}{c}) \quad \text{el. Dipolstrahlung}$$

Hertz'scher Dipol (Heinrich Hertz 1857 - 1894):

$$\underline{p}(t) = \underline{p}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\underline{A}^{(1)}(\underline{r}, t) = \frac{-i\omega \mu_0 \underline{p}_0}{4\pi} \frac{e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})}}{r} = \frac{-i\omega \mu_0 \underline{p}_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r}$$



Lorenz-Eichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(\underline{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \nabla \cdot \underline{A} = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{r} \dot{\underline{p}}(t - \frac{r}{c}) \right\}$$

$$\phi(r,t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{r} \underline{p}(t-\frac{r}{c}) \right\} + \underbrace{\phi_{\text{stat}}(t)}_0$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \underbrace{\frac{1}{c^2} \underline{r} \cdot \ddot{\underline{p}}(t-\frac{r}{c})}_{\sim \frac{1}{r}} + \underbrace{\frac{1}{r^3} \underline{r} \cdot \underline{p}(t-\frac{r}{c})}_{\sim \frac{1}{r^2}} \right\}$$

Grenzfälle

(i) Fernzone (Wellenzone): $r \gg \lambda (\gg a) \Leftrightarrow \boxed{kr \gg 1}$

$$\phi(r,t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \underline{r} \cdot \ddot{\underline{p}}(t-\frac{r}{c})$$

$\Leftrightarrow \frac{r}{\lambda} \gg 1$
 $\frac{1}{c} \dot{p} \sim \frac{\omega}{c} p \gg \frac{p}{r}$
 Retardierung wichtig!

(ii) Nahzone (quasistatischer Bereich): $\lambda \gg r (\gg a) \boxed{kr \ll 1}$

$$\phi(r,t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \underline{r} \cdot \underline{p}(t) \left(-\frac{1}{r^3} \underline{r} \cdot \underline{r} \dot{p}(t) + \frac{1}{c^2} \underline{r} \cdot \ddot{\underline{p}}(t) \right)$$

↑
Entw. nach $p(t)$
instantanes Dipolpotential!

Retardierung kompensiert \dot{p} -Term

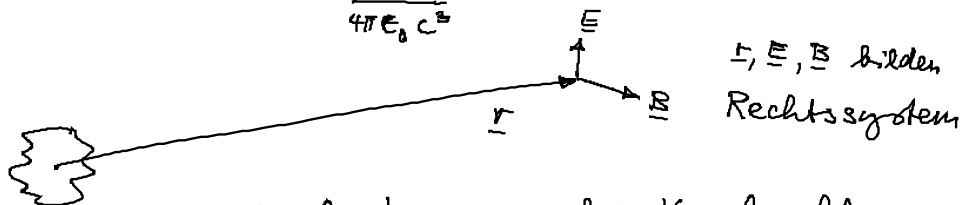
Berechnung der Felder in Fernfeldnäherung:

$$\underline{B}(r,t) = \nabla \times \underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\frac{1}{r} \dot{\underline{p}}(t-\frac{r}{c}) \right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{1}{r^2} \left[\ddot{\underline{p}}(t-\frac{r}{c}) \times \underline{r} \right] + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\underline{E}(r,t) = -\nabla\phi - \dot{\underline{A}}(r,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r^3} \left[\ddot{\underline{p}}(t-\frac{r}{c}) \times \underline{r} \right] \times \underline{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Es gilt: $\underline{B} \times \left(\frac{\underline{E}}{r} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{1}{r^3} (\ddot{\underline{p}} \times \underline{r}) \times \underline{r} = \frac{1}{c} \underline{E}$



Ausbreitung wie freie Kugelwelle
 (nur in der Fernzone!)

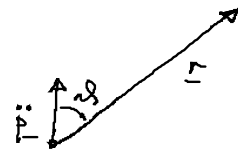
NB: In der Nahzone gilt immer noch $\underline{B} \perp \underline{r}$
 aber \underline{E} hat longitud. Kompon. $\underline{E}_{||} \parallel \underline{r}$
 neben $\underline{E}_{\perp} \perp \underline{r}$

Poynting-Vektor (Energiestromdichte):

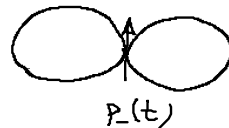
$$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H} = -\frac{1}{\mu_0} \underline{B} \times \underline{E} = -\frac{c}{\mu_0 r} \underline{B} \times (\underline{B} \times \underline{r})$$

$$= -\frac{c}{\mu_0 r} \left\{ \underbrace{(\underline{B} \cdot \underline{r}) \underline{B}}_0 - B^2 \underline{r} \right\}$$

$$= \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \frac{1}{r^4} \underbrace{\left(\ddot{\underline{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \underline{r} \right)^2}_{\left| \ddot{\underline{p}} \right|^2 r^2 \sin^2 \alpha} \frac{1}{r} \underline{r}$$



$$\underline{S} = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \left| \ddot{\underline{p}} \right|^2 \frac{1}{r^2} \sin^2 \alpha \frac{\underline{r}}{r}$$



$$\left(\begin{matrix} \hat{L} \\ L=5 \\ m=0 \end{matrix} \right)$$

Abstrahlcharakteristik des Hertz'schen Dipol: stark richtungsabhängig!

$$\underline{p}(t) = \underline{p}_0 e^{-i\omega t} \quad ; \quad \left| \ddot{\underline{p}} \right|^2 = \underline{p}_0^2 \omega^4 \quad \text{stark frequenzabh. !}$$

gute Näherung für eine lineare Antenne $\rightarrow \underline{I}(t)$