

English Summary:

Four-vectors and Minkowski space

contravariant components $x^\mu = ct$, $x^i = \text{Cartesian comp. of } \underline{r}$ ($i=1,2,3$)

covariant components $x_\mu = x^\mu$, $x_i = -x^i$

$$(ds)^2 = dx^\mu g_{\mu\nu} dx^\nu = dx^\mu dx_\mu = dx_\mu dx^\mu \quad \text{scalar product (Lorentz invariant)}$$

$$\text{metric tensor } g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

time-like 4-vectors: $x^\mu x_\mu > 0$

space-like 4-vectors: $x^\mu x_\mu < 0$

Lorentz transform:

$$x'^\mu = U^\mu{}_\nu x^\nu$$

$$x'_\mu = U_\mu{}^\nu x_\nu$$

$$U^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^{-1} \\ U \end{pmatrix} \begin{matrix} \mu \\ \nu \end{matrix}$$

$$U^{-1}(\beta) = U(-\beta)$$

6.3 Relativistische Mechanik

Newton'sche Mechanik ist nicht Lorentz-invariant.

Jetzt: Lorentz-invariante Formulierung mit Hilfe von Vierervektoren u. Skalaren (= Invarianten).

grenzfall $v \ll c$ soll klass. Mechanik ergeben.

Nichtrelativist. Bahn $\underline{r} = \underline{r}(t)$

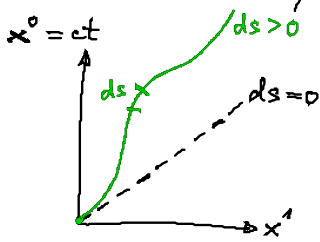
Vierervektoren $x^\mu(t)$: Parametrisierung der Weltlinie (ct, x, y, z) durch t ungeeignet, da sich t bei Lorentz-Transform. ändert.

Def.: Eigenzeit τ = Zeit im momentanen Ruhesystem (vom Teilchen mitgeführte Uhr)

$$\Rightarrow x^\mu(\tau)$$

Bogenlänge der Weltlinie:

$$\begin{aligned}
 ds &= (dx^\mu dx_\mu)^{1/2} = (c^2 dt^2 - (d\mathbf{r})^2)^{1/2} \\
 &= c \left[1 - \left(\frac{1}{c} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt \\
 &= c (1 - \beta^2)^{1/2} dt \quad \beta = \frac{v}{c} = \frac{1}{c} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \\
 &= c \frac{dt}{\gamma} \quad \text{Lorentz-Trafo für } dx=0 \\
 &= c d\tau \quad d\tau = dt' = \frac{dt}{\gamma} \quad (\text{momentanes Ruhesystem})
 \end{aligned}$$



$$\tau = \frac{s}{c}$$

Def.: Vierergeschwindigkeit

$$u^\mu := \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{1}{c} \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

dimensionslos!

$$u^\mu u_\mu = \frac{dx^\mu dx_\mu}{(ds)^2} = \frac{(ds)^2}{(ds)^2} = 1$$

Lorentz-invariant, Einheitsvektor (ds Skalar)

Komponenten $u^\mu = \frac{1}{c} \frac{dx^\mu}{d\tau}$:

$$\begin{aligned}
 u^0 &= \gamma \\
 u^i &= \frac{\gamma}{c} v^i = \frac{1}{c} \frac{dx^i}{d\tau} \quad i=1,2,3
 \end{aligned}$$

$\rightarrow 1$
 $\rightarrow \frac{1}{c} v^i$

nichtrelativistisch, Grenzfall $\beta \ll 1$:
 v^i Teilchengeschw.

Def.: Viererimpuls

$$p^\mu := m_0 c u^\mu = m_0 \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

mit Ruhemasse m_0

$$p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2 u^\mu u_\mu = m_0^2 c^2 \quad \text{Lorentz-invariant}$$

$$\begin{aligned}
 p^0 &= \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = m(v) c = p_0 \\
 p^i &= \frac{m_0 v^i}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = m(v) v^i = -p_i
 \end{aligned}$$

$\beta \ll 1 \rightarrow m_0 v^i$ (nichtrelativist. Impuls)

mit geschwindigkeitsabh. Masse

$$m(v) := \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Es gilt

$$(*) \quad \frac{p^i}{p^0} = \frac{u^i}{u^0} = \frac{\gamma v^i}{\gamma c} = \frac{v^i}{c}$$

Zus.hang Viererimpuls - Vierergeschw. - Teilchengeschw.

Physikal. Bedeutung von p^0

Verallg. des Newton'schen Grundgesetzes

$$\underline{F} = \frac{d}{dt} \underline{p} \quad (\text{nicht lorentz-invariant!})$$

auf relativist. invariante Form:

Def.: Viererkraft (Minkowski-Kraft)

$$\underline{f}^{\mu} := \frac{d p^{\mu}}{d\tau} = m_0 c \frac{d u^{\mu}}{d\tau} = m_0 \frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2}$$

Leistungsbilanz

$$u^{\mu} u_{\mu} = 1 \Rightarrow \frac{d}{d\tau} (u^{\mu} u_{\mu}) = 2 \frac{d u^{\mu}}{d\tau} u_{\mu} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{f}^{\mu} u_{\mu} \stackrel{!}{=} 0 \quad (*)$$

$$\Rightarrow \gamma \frac{d}{dt} p^0 + \frac{1}{c} \sum_{i=1}^3 \underline{f}^i v_i = \frac{1}{c} \left[\frac{d}{dt} (c p^0) - \underline{f} \cdot \underline{v} \right] \stackrel{(*)}{=} 0$$

Änderung der Energie $\hat{=}$ Leistung

Def.: relativist. Energie

$$E := c p^0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = m(v) c^2 \quad \text{Energie}$$

somit $\underline{p}^0 = \frac{E}{c} \rightarrow \text{Energie}$

und $\underline{f}^0 = \frac{1}{c} \underline{f} \cdot \underline{v}$ Leistung mit $\underline{f} = (f^1, f^2, f^3)$

Relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \underline{p}^2 = (m_0 c)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 \underline{p}^2} \Leftrightarrow E = \sqrt{c^2 \underline{p}^2 + (m_0 c^2)^2}$$

nichtrelativist. Grenzfall $|\underline{p}| \ll m_0 c$

$$E = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{\underline{p}^2}{m_0^2 c^2}} \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{\underline{p}^2}{2 m_0^2 c^2} + \dots\right)$$

$$\approx m_0 c^2 + \frac{\underline{p}^2}{2 m_0} + \dots$$

Ruhe-
energie kinet.
Energie

$$\underline{p} = 0 : E = m_0 c^2$$

Äquivalenz v.
Ruhemasse
und Energie

(Anwendung: Zerfall ruhender
Elementarteilchen in Zerfallsprodukte
mit kinet. Energie,

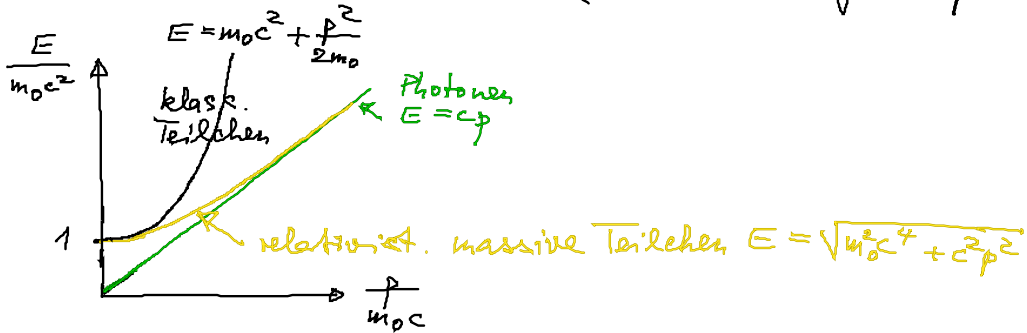
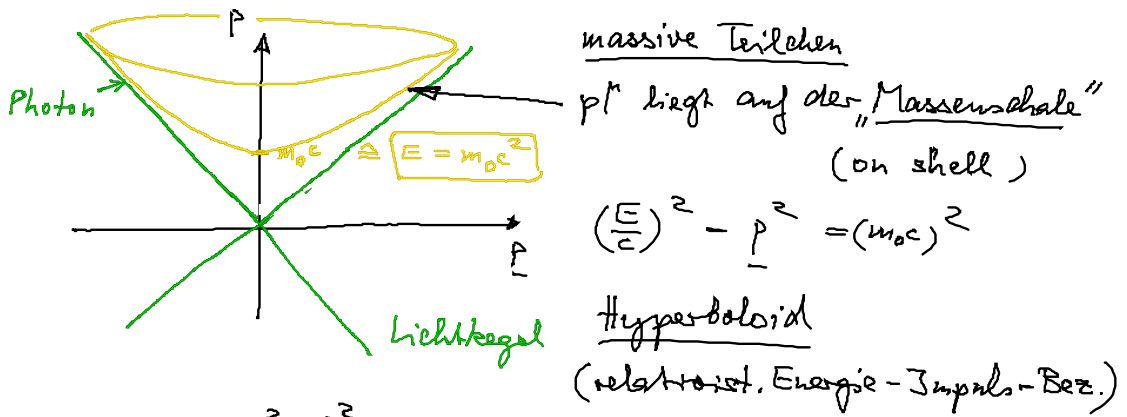
z.B. $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu + E_{\text{kin}}^{\nu}$ (ca. 25%
der π^+ -
Ruheenergie)

hochrelativist. Grenzfall: $m_0 = 0$ (z.B. Photon)

$$E = c |\underline{p}| \quad p^\mu = (|\underline{p}|, \underline{p}) \quad \text{mit } p^\mu p_\mu = 0$$

(lichtartiger Vektor)

$$v = c \Rightarrow u^\mu \text{ nicht mehr definiert, da } \gamma \rightarrow \infty$$



Bem.: Welle-Teilchen-Dualismus der Quantentheorie

Photon :	$E = cp$	} DeBroglie-Beziehung
Lichtwelle (Vakuum)	$\omega = ck$	
	ω Kreisfrequenz	\hbar Planck'sches Wirkungsquantum
	k Wellenzahl	

$E = \hbar \omega$
 $p = \hbar k$