

English Summary:

Electric multipoles

monopole ($l=0$): $\phi^{(0)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0}{r}$ $Q_0 = \int d^3r' \rho(\underline{r}')$ total charge

dipole ($l=1$): $\phi^{(1)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\underline{p} \cdot \underline{r}}{r^3}$ $\underline{p} = \int d^3r' \rho(\underline{r}') \underline{r}'$ el. dipole moment

quadrupole ($l=2$): $\phi^{(2)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\underline{r} \underline{Q} \underline{r}}{2r^5}$ $Q_{kl} = \int d^3r' \rho(\underline{r}') (3x'_k x'_l - r'^2 \delta_{kl})$
 tensor of el. quadrupole moment

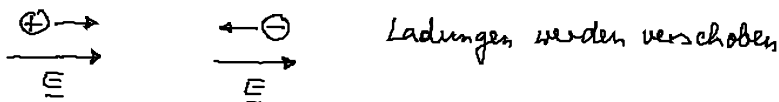
el. stat. field energy

field energy density $w(\underline{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} \underline{E}(\underline{r}) \cdot \underline{E}(\underline{r})$ $W = \int d^3r w(\underline{r})$

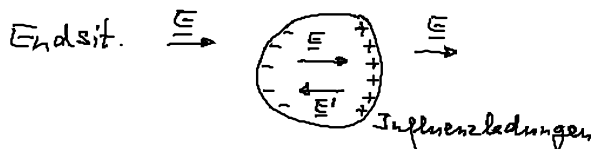
1.6 Leiter in der Elektrostatik

Elektrische Leiter = Materie mit quasi-frei beweglichen elektr. Ladungen

El. Feld $\underline{E}(\underline{r})$ im Inneren eines Leiters \rightarrow Kraft $\underline{F} = q\underline{E}$



\Rightarrow kompensierendes Gegenfeld \underline{E}' , bis $\underline{F} = 0$, d.h. $\underline{E}' - \underline{E} = 0$

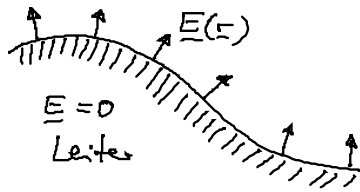


$\Rightarrow \underline{E}^{res}(\underline{r}) = 0$ im Inneren des Leiters

$$\underline{E}^{res}(\underline{r}) = -\underline{\nabla}\phi(\underline{r}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(\underline{r}) = \text{const.}$$

im Inneren

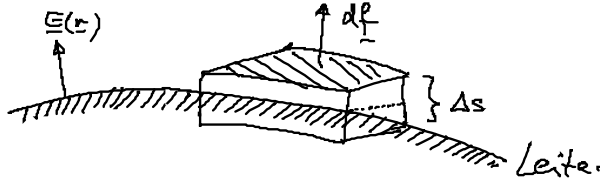
\Rightarrow Leiteroberfläche ist Äquipotentialfläche
 Vakuum



$$\underline{E}(\underline{r}) \perp \phi(\underline{r}) = \text{const} \quad (\text{Leiteroberfläche})$$

$$\underline{E} = 0 \Rightarrow \rho(\underline{r}) = 0$$

Flächenladungsdichte auf Leiteroberflächen:



$$\epsilon_0 \oint_{\partial V} \underline{d\vec{f}} \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \int_V d^3r \rho(\underline{r})$$

$$V = dA \Delta s \quad \text{mit } dA \rightarrow 0, \quad \Delta s \rightarrow 0$$

$$\oint_{\partial V} \underline{d\vec{f}} \cdot \underline{E}(\underline{r}) \rightarrow dA \underbrace{\underline{n} \cdot \underline{E}}_E \quad (\underline{n} \parallel \underline{E})$$

\underline{n} Normalenvektor

$$\int_V d^3r \rho(\underline{r}) \rightarrow dA \underbrace{\rho(\underline{r}) \Delta s}_{\sigma(\underline{r}) \text{ Flächenladungsdichte}}$$

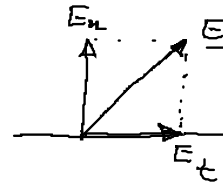
$$\Rightarrow \boxed{\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\underline{r}) \underline{n}} \quad \text{auf Leiteroberfläche}$$

Allg. gilt für Flächenladungen σ

$$\underbrace{E_n'' - E_n'}_{\text{Flächendivergenz}} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\underline{r}) \quad \text{vgl. } \nabla \cdot \underline{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\underline{r})$$

Volumendivergenz

= Sprung der Normalkomp. von \underline{E} beim Durchgang durch geladene Flächen



Tangentialkomp. von \underline{E} ist stetig beim Durchgang durch geladene Flächen

Beweis:

$$\oint_{\partial F} \underline{E} \cdot d\underline{s} = \int_F \nabla \times \underline{E} \cdot d\underline{f} = 0$$



$$F = dl \Delta h \quad \text{mit } dl \rightarrow 0, \Delta h \rightarrow 0$$

$$(E_z'' - E_z') dl = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_z'' - E_z' = 0 \\ E_n'' - E_n' = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\pm) \end{cases}$$

Randwertaufgabe der Elektrostatik mit Leitern

1. Grundaufgabe:

geg.: Leiter L_α (Oberflächen S_α), $\alpha=1, \dots, b$
mit Pot. ϕ_α ;

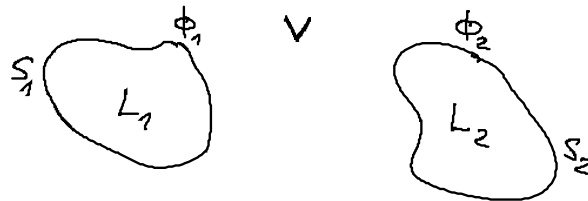
Raumladungsdichte $\rho(\underline{r})$ im Außenraum V

gesucht: $\phi(\underline{r})$ als Lösung von $\Delta \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\underline{r})$

zu den Randbed. $\phi(\underline{r})|_{S_\alpha} = \phi_\alpha$

$\phi(\underline{r}) \rightarrow 0$
 $r \rightarrow \infty$

sowie Gesamtladungen Q_α auf den Leitern
(Dirichlet'sches Randwertproblem)



Lösung:

$$(*) \quad \phi(\underline{r}) = \int_V d^3r' G(\underline{r}-\underline{r}') \rho(\underline{r}') + \epsilon_0 \sum_{\alpha=1}^n \phi_\alpha \int_{S_\alpha} d\underline{f}' \cdot \underline{\nabla}_{r'} G(\underline{r}-\underline{r}')$$

wobei die Green'sche Fkt. $G(\underline{r}-\underline{r}')$ die Lösung
von $\Delta_r G(\underline{r}-\underline{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\underline{r}-\underline{r}')$ zu den Randbed.

$$G(\underline{r}-\underline{r}') \Big|_{\substack{\underline{r} \in S_\alpha \\ \underline{r}' \in V}} = 0, \quad G(\underline{r}-\underline{r}') \rightarrow 0 \quad r \rightarrow \infty$$

ist.

Beweis:

Aus dem Gauß'schen Satz

$$\int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \underline{v} = \int_V d^3r \operatorname{div} \underline{v}$$

folgt mit $\underline{v} = \epsilon \nabla \varphi$

$$\int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \epsilon \nabla \varphi = \int_V d^3r (\epsilon \Delta \varphi + \underbrace{\nabla \epsilon \cdot \nabla \varphi}_{\dots})$$

oder mit $\underline{v} = \varphi \nabla \epsilon$

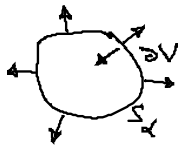
$$\int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \varphi \nabla \epsilon = \int_V d^3r (\varphi \Delta \epsilon + \underbrace{\nabla \varphi \cdot \nabla \epsilon}_{\dots})$$

\Rightarrow Green'scher Satz:

$$\int_{\partial V} d\vec{f} \cdot (\varphi \nabla \epsilon - \epsilon \nabla \varphi) = \int_V d^3r (\varphi \Delta \epsilon - \epsilon \Delta \varphi)$$

Setze $\epsilon(\underline{r}) := G(\underline{r} - \underline{r}')$, $\varphi(\underline{r}) := \phi(\underline{r})$ $\partial V = \bigcup_{\alpha=1}^n S_\alpha$

(i) zeige: $\Delta \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\underline{r}) \Rightarrow \phi(\underline{r}) = (*)$



$$\int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \phi(\underline{r}) \nabla_r G(\underline{r} - \underline{r}') - \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot G(\underline{r} - \underline{r}') \nabla \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \left[\int_V d^3r \phi(\underline{r}) \delta(\underline{r} - \underline{r}') - \int d^3r G(\underline{r} - \underline{r}') \rho(\underline{r}) \right]$$

Vorzeichenwechsel!
 \downarrow
 $\bigcup_{\alpha=1}^n S_\alpha$

$G|_{r \in S_\alpha} = 0$
 \Rightarrow wegen \dots

$$\Rightarrow \phi(\underline{r}') = \int d^3r G(\underline{r} - \underline{r}') \rho(\underline{r}) + \epsilon_0 \sum_{\alpha=1}^n \phi_\alpha \int_{S_\alpha} d\vec{f} \cdot \nabla_r G(\underline{r} - \underline{r}')$$

(ii) zeige: $\phi(\underline{r}) = \textcircled{B} \Rightarrow \Delta \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$ im Inneren von V

$\phi|_{S_\alpha} = \phi_\alpha$ Randbed. erfüllen

$$\Delta_n \phi(\underline{r}') = \int d^3r \underbrace{\Delta_n G(\underline{r} - \underline{r}')}_{-\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\underline{r} - \underline{r}')} \rho(\underline{r}) + \epsilon_0 \sum_{\alpha} \phi_\alpha \int_{S_\alpha} d\vec{f} \cdot \nabla_r \underbrace{\Delta_n G(\underline{r} - \underline{r}')}_{-\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\underline{r} - \underline{r}')}$$

$0, \text{ da } \underline{r} \in S_\alpha$
 $\underline{r}' \in V - \partial V$

$$= -\frac{1}{\epsilon_0} \phi(\underline{r}')$$

Lös. des inhom. Poissonpf.
zu homog. Randbed.

Lös. des homog. Poissonpf.
zu inhomog. Randbed.
 $\phi|_{S_\alpha} = \phi_\alpha$

$$\phi(\underline{r}')|_{\underline{r}' \in S_\beta} = \underbrace{\int_V d^3r G(\underline{r}-\underline{r}') \rho(\underline{r})}_0 + \epsilon_0 \sum_\alpha \underbrace{\oint_{S_\alpha} d\vec{f} \cdot \nabla_r G(\underline{r}-\underline{r}')}_0 |_{\underline{r}' \in S_\beta}$$

$$= -\epsilon_0 \int d\vec{f} \left(\frac{\partial \phi(\underline{r})}{\partial \nu} \right) \nabla_r G(\underline{r}-\underline{r}') |_{\underline{r}' \in S_\beta}$$

Vorzeichen-
wechsel
von \underline{n}

Green'scher Satz

$$= -\epsilon_0 \left[\underbrace{\int_V d^3r G(\underline{r}-\underline{r}') \nabla_r^2 \phi}_0 + \underbrace{\int_V d^3r \left(\phi \Delta_r G(\underline{r}-\underline{r}') - G(\underline{r}-\underline{r}') \Delta \phi \right)}_{-\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\underline{r}-\underline{r}')} \right] |_{\underline{r}' \in S_\beta}$$

$$= -\frac{1}{\epsilon_0} \phi(\underline{r}') |_{\underline{r}' \in S_\beta}$$

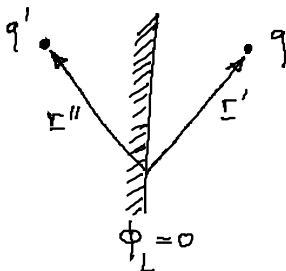
$$= \phi_\beta \quad \square$$

Ladung: $Q_\alpha = \oint_{S_\alpha} d\vec{f} \cdot \underline{\sigma} = \epsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\vec{f} \cdot \underline{n} \underline{E} = -\epsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\vec{f} \cdot \nabla \phi$

Konstruktion der Green'schen Fkt.

für Leiteroberflächen mit hoher Symmetrie:

Methode der Bildladungen (Spiegelbildungen) $\ddot{U}1$



Wähle fiktive Bildladung q' bei \underline{r}'' im Leiter, so dass Pot. beider Ladungen auf Leiteroberfläche verschwindet:

$$q' = -q$$

$$G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} - \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}''|} \right)$$

