

English Summary:

Magnetostatics (stationary currents)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{B} &= 0 \quad (\text{no sources}) \\ \Downarrow \\ \underline{B} &= \nabla \times \underline{A} \quad \Leftrightarrow \oint_{\partial V} \underline{B} \cdot d\underline{s} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{B} &= \mu_0 \underline{j} \\ \Downarrow \\ \oint_{\partial V} \underline{B} \cdot d\underline{s} &= \mu_0 I \quad \text{Ampère} \end{aligned}$$

$$\Downarrow \\ \Delta \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}(\underline{r})$$

only valid if $\text{div} \underline{A} = 0$ (Coulomb gauge)
gauge transformation: $\underline{A}' = \underline{A} + \nabla \chi(\underline{r})$

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{A}') = \nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j}$$

$$\nabla (\nabla \cdot \underline{A}') - \Delta \underline{A}' = 0 \quad \text{for Coulomb gauge}$$

Electrostatics (static charge density)

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{E} &= 0 \quad (\text{curl-free}) \\ \Downarrow \\ \underline{E} &= -\nabla \phi \quad \Leftrightarrow \oint_{\partial V} \underline{E} \cdot d\underline{s} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \nabla \cdot \underline{E} &= \rho \quad \text{diff. form} \\ \Downarrow \\ \epsilon_0 \oint_{\partial V} d\underline{s} \cdot \underline{E} &= Q \quad \text{integral form Gauss} \end{aligned}$$

$$\Downarrow \\ \Delta \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\underline{r}) \quad \text{Poisson eq.}$$

2.4. Magnetische Multipole (stationär)

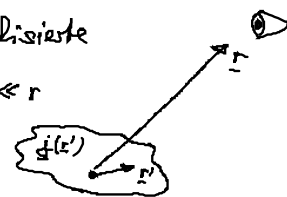
Ausgangspunkt $\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d\underline{r}' \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$ (Coulomb-Eichung $\text{div} \underline{A} = 0$)

mit Randbed. $\underline{A}(\underline{r}) \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$

Taylorentwicklung von $\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$ für räumlich-lokalisierte stationäre Stromverteilung $\underline{j}(\underline{r}')$ für $r' \ll r$

um $\underline{r}' = 0$:

$$\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{(\underline{r} \cdot \underline{r}')}{r^3} + \dots$$



$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{\mathbb{R}^3} d\underline{r}' \underline{j}(\underline{r}') + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\underline{r}' (\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{j}(\underline{r}') + \dots$$

Monopol-Term

$$\text{Mit } \nabla_{r'} \cdot [x'_k \underline{j}(\underline{r}')] = \underbrace{x'_k (\nabla_{r'} \cdot \underline{j})}_0 \text{ "stat."!} + \underbrace{\underline{j} \cdot \nabla_{r'} x'_k}_{\sum_k \underline{j}_k \delta_{rk} = j_k} = j_k$$

$$\text{folgt: } \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \underline{j}_k(\underline{r}') = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \nabla_{r'} \cdot [x'_k \underline{j}] \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_{S_\infty} d\underline{\Omega} \cdot x'_k \underline{j} = 0$$

Monopol-Term verschwindet!

Dipol-Term

$$\text{Mit } (\underline{r}' \times \underline{j}) \times \underline{r} = (\underline{r}' \cdot \underline{r}) \underline{j} - (\underline{r}' \cdot \underline{j}) \underline{r} \quad \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b})$$

$$= 2(\underline{r}' \cdot \underline{j}) \underline{j} - [(\underline{r}' \cdot \underline{j}) \underline{j} + (\underline{r}' \cdot \underline{r}) \underline{j}] \stackrel{r}{=} \underline{j} \cdot \underline{r}'$$

(*)

$$\text{und } \nabla_{r'} \cdot \{x'_k (\underline{r}' \cdot \underline{j}) \underline{j}\} = [(\underline{r}' \cdot \underline{r}') j_k + x'_k (\underline{r}' \cdot \underline{j}) + x'_k (\underline{r}' \cdot \underline{r}') \nabla_{r'} \cdot \underline{j}]$$

stat.! $\underbrace{\quad}_0$

folgt

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \nabla_{r'} \cdot \{x'_k (\underline{r}' \cdot \underline{j}) \underline{j}\} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' [(\underline{r}' \cdot \underline{r}') j_k + (\underline{r}' \cdot \underline{j}) x'_k] = 0$$

$$\int_{S_\infty} d\underline{\Omega} \cdot \{x'_k (\underline{r}' \cdot \underline{j}) \underline{j}\}$$

0, da $j \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \rightarrow \infty$

⇒ [...] in (*) gibt keinen Beitrag

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' (\underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}')) \times \underline{r}}_{\underline{m} \text{ magn. Dipolmoment}} \quad \text{Dipolpotenzial}$$

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \underline{m} \times \underline{r}$$

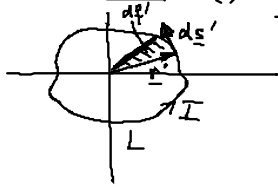
(analog zu $\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^3} \underline{p} \cdot \underline{r}$ mit $\underline{p} := \int d^3 r' \underline{r}' \rho(\underline{r}')$ el. Dipolmoment)

Magn. Induktion des Dipolmoments \underline{m} :

$$\underline{B}(\underline{r}) = \text{rot} \left[\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \underline{m} \times \underline{r} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^5} [3(\underline{m} \cdot \underline{r}) \underline{r} - r^2 \underline{m}]$$

(analog $\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r^5} [3(\underline{p} \cdot \underline{r}) \underline{r} - r^2 \underline{p}]$ el. Dipolfeld)

Beispiel: (i) ebene Leiterschleife L



$$d\vec{s}' = \frac{1}{2} \vec{r}' \times d\vec{s}'$$

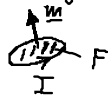
$$d^3\vec{r}' \vec{j}(\vec{r}') = d\vec{s}' I$$

$$\underline{m} = \frac{1}{2} \oint_L d^3\vec{r}' \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') = \frac{I}{2} \oint_L \vec{r}' \times d\vec{s}' = I \int_F d\vec{s}' = I F \underline{n}$$

\underline{n} Normale auf der von L eingeschloss. Fläche F

also:

Ringstrom \rightarrow magn. Dipolmoment \underline{m}



(analog 2 Pkt. lad. \rightarrow el. Dipolmoment $\underline{p} = q \underline{a}$)

$$q \oplus \xrightarrow{\underline{a}} \ominus q$$

(ii) Bewegte Ladungen

N Teilchen mit Massen m_i und Ladungen q_i ,
spezif. Ladung $\frac{q_i}{m_i} = \frac{q}{m}$ sei konstant:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sum_i q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad \text{mit Geschw. } \vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

magn. Dipolmoment:

$$\underline{m} = \frac{1}{2} \int d^3\vec{r}' \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') = \frac{1}{2} \sum_i q_i \int d^3\vec{r}' \vec{r}' \times \vec{v}_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i q_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum_i \underbrace{\frac{q_i}{m_i}}_{\frac{q}{m}} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \frac{q}{2m} \underline{L}$$

\underline{L} Bahndrehimpuls

$$\underline{m} = \frac{q}{2m} \underline{L}$$

gilt auch für starre Körper

gilt nicht für Spin eines Elektrons!

$$\underline{m} = g \frac{e}{2m} \underline{S} \quad \text{mit } g \approx 2 \quad \text{Landé-Faktor}$$

Kraft auf Stromverteilung $\underline{j}(\underline{r}') = g(\underline{r}') \underline{v}(\underline{r}')$
 im Feld einer magn. Induktion $\underline{B}(\underline{r}')$ (extern)

$$\underline{B}(\underline{r}') = \underline{B}(\underline{r}) + [(\underline{r}' - \underline{r}) \cdot \underline{\nabla}_r] \underline{B}(\underline{r}) + \dots \text{ Taylorentw.}$$

(Probe dipol im geg. $\underline{B}(\underline{r})$)

Lorentz-Kraft $\underline{F} = \int d^3r' \underline{j}(\underline{r}') \times \underline{B}(\underline{r}')$

$$\Rightarrow \underline{F} = \underbrace{\int d^3r' \underline{j}(\underline{r}') \times \underline{B}(\underline{r})}_{\text{kein Monopol! 0 (stat.)}} + \int d^3r' \underline{j}(\underline{r}') \times [(\underline{r}' - \underline{r}) \cdot \underline{\nabla}_r] \underline{B}(\underline{r}) + \dots$$

$$= \int d^3r' \underline{j}(\underline{r}') \times \underbrace{[(\underline{r}' \cdot \underline{\nabla}_r) \underline{B}(\underline{r})]}_{\underline{\nabla}_r (\underline{r}' \cdot \underline{B}(\underline{r}))} - \underbrace{\int d^3r' \underline{j}(\underline{r}') \times [(\underline{r} \cdot \underline{\nabla}_r) \underline{B}(\underline{r})]}_{0 \text{ (stat.)}} + \dots$$

$$\underline{\nabla}_r (\underline{r}' \cdot \underline{B}(\underline{r})) - \underline{r}' \times \underbrace{(\underline{\nabla}_r \times \underline{B}(\underline{r}))}_{0 \text{ (ext.!)}}$$

$$= \int d^3r' \underline{j}(\underline{r}') \times \underline{\nabla}_r (\underline{r}' \cdot \underline{B}(\underline{r})) - \underline{\nabla}_r \times [(\underline{r}' \cdot \underline{B}(\underline{r})) \underline{j}(\underline{r}')] + \underbrace{(\underline{r}' \cdot \underline{B}(\underline{r})) \underline{\nabla}_r \times \underline{j}(\underline{r}')}_0$$

$$= - \underline{\nabla}_r \times (\underline{m} \times \underline{B}(\underline{r})) = (\underline{m} \cdot \underline{\nabla}_r) \underline{B}(\underline{r}) = - \underline{\nabla}_r (-\underline{m} \cdot \underline{B}(\underline{r}))$$

pot. Energie eines Dipols im Magnetfeld $\underline{V} = -\underline{m} \cdot \underline{B}(\underline{r})$

(analog: $V = -\underline{p} \cdot \underline{E}$ für el. Dipol im Feld $\underline{E}(\underline{r})$)

3. Maxwell-Gleichungen im Vakuum

3.1 Induktionsgesetz

Betrachte nun nichtstationäre Ladungs- und Stromdichteverteilung u. Felder

Exp. Erfahrung (Faraday 1831):

zeitl. veränderliche Magnetfelder induzieren eine Spannung in einer Leiterschleife:

$$\oint_C \underline{E} \cdot d\underline{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t)$$

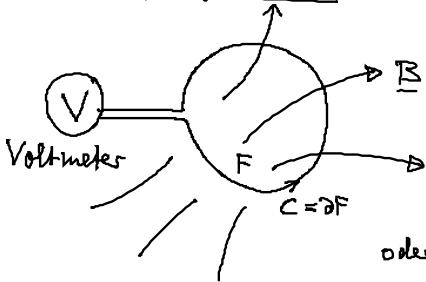
Faraday'sches Induktionsgesetz

induz. Spannung

mit magn. Fluss

$$\Phi := \int_F \underline{B} \cdot d\underline{f} = \int_F \text{rot } \underline{A} \cdot d\underline{f} = \oint_{\partial F} \underline{A} \cdot d\underline{s}$$

Stokes



Änderung des magn. Flusses

a) durch $\frac{\partial}{\partial t} B$ (Trafo)

oder b) durch $\frac{\partial F}{\partial t}$ (Fahreraddynamo mit Permanentmagn., Generator)

Φ hängt nur vom Rand ∂F von F ab:

Serien F, F' 2 Flächen mit demselben Rand ∂F , die das Volumen V einschließen

$$\int_F d\underline{f} \cdot \underline{B} - \int_{F'} d\underline{f} \cdot \underline{B} = \oint_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{B} = \int_V \text{div } \underline{B} = \int_V \rho_{\text{ext}} = 0$$



Potentialdifferenz bei 1 Umlauf um ∂F :

$$\Delta \Phi = U_{\text{ind}} = - \oint_C \underline{E} \cdot d\underline{s} \quad \text{induzierte Spannung}$$