

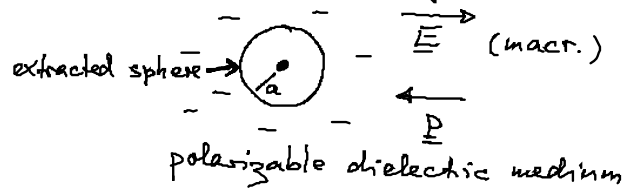
English Summary:

Microscopic model of polarizability

$$\ddot{\underline{r}} + \omega_0^2 \underline{r} = \frac{e}{m_e} \underline{E}_a \Rightarrow \text{polarizability } \propto \text{microscopic dipole moment } p = Ze\underline{r}$$

macroscopic polarization $\underline{P} = n p = \epsilon_0 n \alpha \underline{E}_a$ (n mean atom density)

Self-consistent calculation of local field \underline{E}_a (micr.)

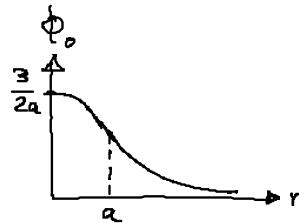


Feld einer homogen polarisierten Kugel:

a) homogen geladene Kugel

$$\underline{E}_0(\underline{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{\underline{r}}{a^3} & r \leq a \\ \frac{\underline{r}}{r^3} & r \geq a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi_0(\underline{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} c - \frac{r^2}{2a^3} & r \leq a \\ \frac{1}{r} & r \geq a \end{cases}$$



Bestimmung der Integrationskonst. c :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi_0(a - \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi_0(a + \epsilon) \Rightarrow c = \frac{3}{2a}$$

b) homogen polarisierte Kugel:

Überlagerung von 2 entgegengesetzt homogen geladenen Kugeln im Abstand \underline{r}_0 , $r_0 > 0$



$$\phi(\underline{r}) = \phi_0\left(\underline{r} - \frac{1}{2}\underline{r}_0\right) - \phi_0\left(\underline{r} + \frac{1}{2}\underline{r}_0\right)$$

$$\stackrel{\text{Taylor}}{\approx} -\underline{r}_0 \cdot \underbrace{\nabla \phi_0(\underline{r})}_{-\underline{E}_0} = \underline{r}_0 \underline{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{Q \underline{r}_0 \cdot \underline{r}}{a^3} & r \leq a \\ \frac{Q \underline{r}_0 \cdot \underline{r}}{r^3} & r \geq a \end{cases}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{\underline{P} \cdot \underline{r}}{a^3} & r \leq a \\ \frac{\underline{P} \cdot \underline{r}}{r^3} & r \geq a \end{cases} \quad \text{mit } \underline{P} = Q\underline{r}_0$$

(el. Dipolmoment der herausgeschnittenen Kugel)

Mit der Polarisation $\underline{P} = \frac{P}{4\pi a^3}$ lässt sich schreiben

$$\phi(\underline{r}) = \begin{cases} \frac{1}{3\epsilon_0} \underline{P} \cdot \underline{r} & r \leq a \quad \text{homog. polarisiert} \\ \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{r^3} \underline{P} \cdot \underline{r} & r \geq a \quad \text{Dipolpotenzial} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{E}_{\text{Kugel}} = -\underline{\nabla}\phi = -\frac{1}{3\epsilon_0} \underline{P} \quad (r \leq a)$$

Innenfeld der homogen polarisierten Kugel

Gesamtes Lokalfeld am Ort des Atoms

$$\underline{E}_a = \underline{E}^{\text{außen}} + \underline{E}^{\text{innen}}$$

durch Atome außerhalb der Hohlkugel erzeugt durch Atome innerhalb der Hohlkugel erzeugt = 0 (für kub. Symm.)

Lokalfeld \underline{E}_a im Inneren des Kugelhohlraums, der aus dem Diel. herausgeschnitten wurde:

$$\underline{E}_a + \underline{E}_{\text{Kugel}} = \underline{E}$$

Lokalfeld am Ort des Atoms Innenfeld der diel. Kugel (wieder in den Hohlraum eingesetzt) mittl. makroskop. Feld

$$\Rightarrow \underline{E}_a(\underline{r}) = \underline{E} - \underline{E}_{\text{Kugel}}$$

$$\underline{E}_a = \underline{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \underline{P} \quad \text{Lorentz-Lorenz}$$

Lokal-feld makr. Feld Korrekturfeld (Lorentz)

Zus.hang zwischen \underline{P} und makroskop. Feld \underline{E} :

$$\underline{P} = \epsilon_0 n \alpha \underline{E}_a = \epsilon_0 n \alpha \left(\underline{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \underline{P} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{P} = \epsilon_0 \chi_e \underline{E}} \quad \text{mit} \quad \boxed{\chi_e = \frac{n \alpha}{1 - \frac{1}{3} n \alpha}}$$

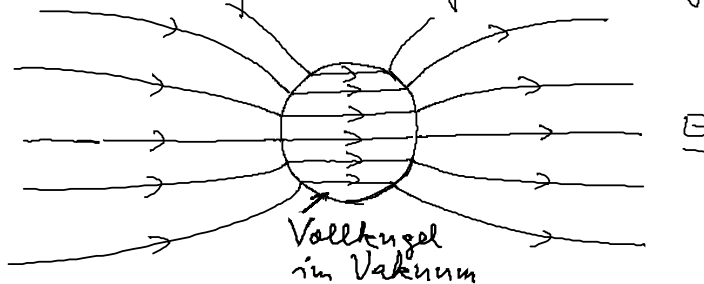
$$\chi_e \left(1 - \frac{1}{3} n \alpha \right) = n \alpha$$

$$\chi_e = n \alpha \left(1 + \frac{\chi_e}{3} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{n \alpha = \frac{\chi_e}{1 + \frac{1}{3} \chi_e} = \frac{\epsilon - 1}{1 + \frac{\epsilon - 1}{3}} = 3 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}}$$

Formel von Clausius - Mossotti

Feld einer polaris. Kugel im homog. Feld \underline{E}



5.6 Wellenausbreitung in Materie

Ann.: homogenes, isotropes, lineares Medium
mit skalaren Materialpar. ϵ , μ , σ Leitfähigkeit

$$\underline{D} = \epsilon_0 \epsilon \underline{E} \quad (\epsilon > 1)$$

$$\underline{B} = \mu_0 \mu \underline{H} \quad (\text{i.a. } \mu \approx 1)$$

$$\underline{j} = \sigma \underline{E} \quad (\text{Ohm'sche Gesetz})$$

a) Wellen in leitenden Medien ohne Dispersion
(d.h. ϵ, μ, σ unabh. v. ω)

$$\text{Sei } \underline{g} = 0$$

$$\nabla \times \underline{E} + \dot{\underline{B}} = 0$$

$$\nabla \times \underline{B} - \mu_0 \mu \epsilon_0 \dot{\underline{E}} = \mu_0 \mu \underline{j} = \mu_0 \mu \sigma \underline{E} \quad \left| \begin{array}{l} \nabla \cdot \underline{E} = 0 \\ \nabla \cdot \underline{B} = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \nabla_{\times}(\nabla_{\times} \underline{E}) = \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \underline{E})}_0 - \Delta \underline{E} = -\nabla_{\times} \dot{\underline{B}}$$

$$= -\mu_0 \mu \epsilon_0 \ddot{\underline{E}} - \mu_0 \mu \sigma \dot{\underline{E}}$$

$$\Delta \underline{E} - \frac{1}{c_M^2} (\ddot{\underline{E}} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \dot{\underline{E}}) = 0$$

gedämpfte Wellengl. mit $c_M := \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu \epsilon_0 \epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu \epsilon}}$

(1-dim.: Telegraphengl., beschreibt Drakwellenausbreitung)

Harmon. ebene Welle (spezielle Lösung)

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$$

$$\Rightarrow \boxed{k^2 = \epsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{1}{\omega \tau}\right)} \quad (\text{Dispersion-Relation})$$

$\tau = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{\sigma}$ dielekt. Relaxationszeit

\Rightarrow Wellenvektor $\underline{k} \in \mathbb{C}$ (wegen Dämpfung)

Setze $\boxed{\underline{k} = \frac{\omega}{c} \tilde{n} = \frac{\omega}{c} (n + i\gamma)}$ c Vakuumlichtgeschw.
 $\tilde{n} = n + i\gamma$ komplexer Brechungsindex

$$\Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (n^2 - \gamma^2 + 2in\gamma) \stackrel{!}{=} \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu \left(1 + \frac{i}{\omega \tau}\right)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} n^2 - \gamma^2 &= \epsilon \mu \\ n\gamma &= \frac{\epsilon \mu}{2\omega \tau} \end{aligned} \right\} n, \gamma$$

oBdA: $\underline{k} \parallel x_3$: $\underline{E}(x_3, t) = \underline{E}_0 e^{-\frac{x_3}{d}} e^{-i\omega(t - \frac{n}{c} x_3)}$

gedämpfte Welle mit Phasengeschw. $\frac{c}{n}$
u. Extinktionskoeff. $d := \frac{c}{\omega \gamma}$

lineare Polarisation: $\underline{E}_0 \parallel x_1 \Rightarrow \underline{B}_0 \parallel x_2$

$$(\nabla \times \underline{E})_2 = \frac{\partial \underline{E}_1}{\partial x_3} = -\dot{\underline{B}}_2$$

$$\Leftrightarrow i \frac{\omega}{c} (n + i\gamma) \underline{E}_1 = i\omega \underline{B}_2$$

$$\Leftrightarrow \underline{B}_2 = \frac{n + i\gamma}{c} \underline{E}_1 = \frac{\sqrt{n^2 + \gamma^2}}{c} e^{i\varphi} \underline{E}_1$$

Phasenverschiebung φ zwischen \underline{E} und \underline{B}

Isolator ($\sigma = 0$): $\tau \rightarrow \infty \Rightarrow \gamma = 0$, $\varphi = 0$
(ungedämpft) $\underline{E}, \underline{B}$ in Phase

reeller Brechungsindex $n = \sqrt{\epsilon_r} \approx \sqrt{\epsilon'} > 1$

$$\Rightarrow \text{Phasengeschw. } \frac{c}{n} < c$$

NB: Nur ohne Dispersion ist ϵ reell!

Metall (σ groß): $\tau = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{\sigma} \ll \frac{1}{\omega}$ (für alle Frequenzen bis UV)

Disp. n.l.

$$\Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (n^2 - \gamma^2 + 2i n \gamma) \approx \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r \frac{i}{\omega \tau}$$

$$\Rightarrow n^2 - \gamma^2 \approx 0$$

$$n\gamma \approx n^2 \approx \gamma^2 \approx \frac{\epsilon_r}{2\omega\tau}$$

$$\Rightarrow n = \gamma \approx \sqrt{\frac{\epsilon_r}{2\omega\tau}}$$

$$\tan \varphi = \frac{\gamma}{n} \approx 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Extinktionskoeff. $d = \frac{c}{\omega \gamma} \sim \text{cm}$ für 100 kHz

(hochfrequente Wellen dringen nicht in Metall ein:
Skin Effekt)

Grund: Verschiebungsstrom \ll Leitungsstrom