

English Summary:

Lorentz-Lorenz local field  $\underline{E}_a = \underline{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \underline{P}$   
macrosc. field

$\Rightarrow \underline{P} = \epsilon_0 \chi_e \underline{E}$ ,  $\chi_e = \frac{n\alpha}{1 - \frac{1}{3}n\alpha}$ ,  $n\alpha = 3 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}$   
 Clausius-Mossotti

$\alpha$  polarizability  
 $n$  mean atom density

Wave propagation in matter

$\Delta \underline{E} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} (\ddot{\underline{E}} + \frac{1}{\tau} \dot{\underline{E}}) = 0$

$\tau \equiv \frac{\epsilon_0 \epsilon}{\sigma}$  dielectric relaxation time (damping)

$k^2 = \epsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} (1 + i \frac{1}{\omega \tau})$

dispersion relation  
 $k = \frac{\omega}{c} (n + i\kappa)$   
refractive index      absorption coefficient

b) Dielektrische Dispersion (Ann.  $\mu = 1$ )

Betrachte nun zeitliche Dispersion, d.h.  $\hat{\chi}(\omega)$ :

$\underline{P}(\omega) = \epsilon_0 \hat{\chi}(\omega) \underline{E}(\omega)$

mit  $\hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \chi(t) e^{i\omega t}$  (dynam. el. Suszeptibilität)

Fourier-Transf.:  $\underline{P}(\underline{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{\underline{P}}(\underline{r}, \omega) e^{-i\omega t}$

$\underline{E}(\underline{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \underline{E}(\underline{r}, t) e^{i\omega t}$

$\underline{P}(\underline{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \epsilon_0 \hat{\chi}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega(t-t')} \underline{E}(\underline{r}, t')$   
 $= \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t dt' \chi(t-t') \underline{E}(\underline{r}, t')$

(Nachwirkungseffekt: Faltungintegral)

NB: Kausalität verlangt  $\chi(t-t') = 0$  für  $t' > t$

Aus mikroskop. Modellen folgt i.a. ein komplexes  $\hat{\chi}(\omega) \in \mathbb{C}$   
 $\Rightarrow$  komplexe diel. Funktion:

$$\epsilon(\omega) = 1 + \hat{\chi}(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega) \quad \text{mit } \epsilon', \epsilon'' \in \mathbb{R}$$

aus  $\epsilon(\omega) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dt \kappa(t) e^{i\omega t}$  folgt

$$\boxed{\epsilon^*(\omega) = \epsilon(-\omega)} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \epsilon'(\omega) &= \epsilon'(-\omega) \\ \epsilon''(\omega) &= -\epsilon''(-\omega) \end{aligned}$$

monochromat. ebene Welle  $\underline{E}(\underline{r}, t) = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$

$$\Rightarrow \boxed{k^2 = \epsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{1}{\omega\tau}\right)} \quad \kappa = \frac{\epsilon_0 \epsilon(\omega)}{\sigma}$$

Isolator (dispersives Dielektrikum):  $\boxed{k^2 \approx \epsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}}$

$k = \frac{\omega}{c} \tilde{n}$ ,  $\tilde{n}(\omega) = n(\omega) + i\gamma(\omega)$  komplexer, frequenzabh. Brechungsindex

mit  $\tilde{n}(\omega)^2 = \epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \epsilon'(\omega) &= n^2 - \gamma^2 \\ \epsilon''(\omega) &= 2n\gamma \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \gamma &= \\ n &= \end{aligned} \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} \mp \epsilon' \right)^{1/2}$$

Abs. koef.  $\gamma$   
 reeller Brechungsindex  $n$

(i) Absorption

a)  $\epsilon'' = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \text{Abs. koef. } \gamma &= 0 \\ \text{Brech. ind. } n &= \sqrt{\epsilon'} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{falls } \epsilon' > 0 \\ &\Rightarrow \text{ungedämpfte Welle} \end{aligned}$

b)  $\epsilon'' > 0 \Rightarrow \gamma > 0$  (gedämpfte Welle)  $\Rightarrow$  Energie-dissipation

Der Frequenzbereich mit  $\epsilon'' \ll \epsilon'$  heißt

Transparenzgebiet der Substanz (wenig Absorption)

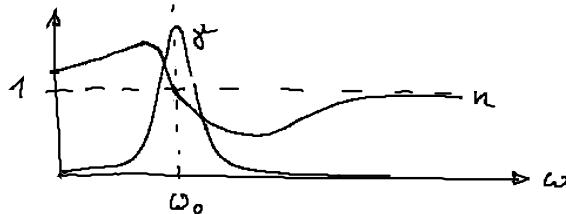
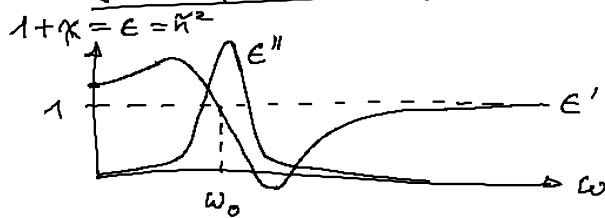
(ii) Dispersion

$$\operatorname{Re} k \equiv k' = \frac{\omega}{c} n(\omega) \quad \text{nichtlin. Dispersion}$$

$$\Rightarrow \text{Gruppengeschw. } v_g := \frac{d\omega}{dk'} = \frac{1}{\frac{dk'}{d\omega}} = \frac{c}{\frac{d(\omega n)}{d\omega}}$$

$$v_g = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} \neq \frac{c}{n(\omega)} = v_{ph}$$

Typ. Frequenzabhängigkeit (Resonanzverh.)



normale Dispersion:  $\frac{dn}{d\omega} > 0$  (stets im Transparenzgebiet)  
 $\epsilon'' \neq 0$ ,  $v_g < v_{ph}$

anomale Dispersion:  $\frac{dn}{d\omega} < 0$  (bei Absorption)

Ref.: Louis de Broglie: Wave propagation

Beziehungen zwischen  $\epsilon'(\omega)$  und  $\epsilon''(\omega)$ :

(Kramers-Kronig-Relationen)

- Allg. gültiger Zus.hang zwischen Dispersion  $n(\omega)$  und Absorption ( $\gamma(\omega)$ ) erlaubt z.B. Berechnung der Dispersionsbez. aus dem Absorptionsspektrum und umgekehrt!
- Folgt aus dem Kausalitätsprinzip!

Beweis ( Methode Funktionen theorie )

Für eine kausale Fkt.  $\chi(t)$  gilt:

$$\chi(t) = \theta(t)\chi(t) \text{ mit } \theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

Heaviside-Fkt.  $\square$

Fourier-Transform:

$$\hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \hat{\theta}(\omega - \omega') \hat{\chi}(\omega')$$

$$\hat{\theta}(\omega) := \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t - \sigma t}$$

( konvergenz-  
erzeugender  
faktor  $e^{-\sigma t}$  )

$$= \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{-1}{i\omega - \sigma}$$

$$\Rightarrow \hat{\chi}(\omega) = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{1}{\omega' - \omega - i\sigma} \hat{\chi}(\omega')$$

Integrand hat Pol bei  $\omega' = \omega + i\sigma$

$\bullet \omega + i\sigma$   
↑  
Integrationsweg

äquivalenter Integrationsweg  $\xrightarrow{\epsilon}$   $\omega'$

Zerlegung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\hat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{-\infty}^{\omega - \epsilon} + \int_{\omega + \epsilon}^{\infty} \right] d\omega' \frac{\hat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} + \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\hat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega}$$

$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\hat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega}$  "Hauptwert" (Principal value)

Integral längs Halbkreis mit Radius  $\epsilon$  um Pol

$$\int_{\omega} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta} = f(\omega) \int_{\omega} d\zeta \frac{1}{\zeta} = f(\omega) i \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi = i\pi f(\omega)$$

$\zeta = \epsilon e^{i\varphi}$   
 $d\zeta = i\zeta d\varphi$

halbes Residuum

$$\Rightarrow \hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\hat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} + \frac{1}{2} \hat{\chi}(\omega)$$

$$\Rightarrow \hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\hat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega}$$

Zerlegung in Re und Im mit  $\text{Re } \hat{\chi}(\omega) = \epsilon'(\omega) - 1$   
 $\text{Im } \hat{\chi}(\omega) = \epsilon''(\omega)$

$$\epsilon'(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\epsilon''(\omega')}{\omega' - \omega}$$

$$\epsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\epsilon'(\omega') - 1}{\omega' - \omega}$$

Kramers-Kronig-  
Relationen