English Summary:

Lorentz transformation in Special Relativity

light propagates with c in any inertial system (Michelson-Morley exp.)

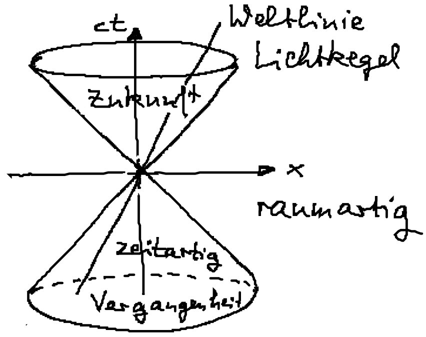
$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ t' &= \gamma\left(t - x\frac{v}{c^2}\right)\end{aligned}} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

$$\Rightarrow \underline{r}'^2 - (ct')^2 = \underline{r}^2 - (ct)^2 \quad \text{invariant}$$

6.2 Vierervektoren und Minkowski-Raum

geometrische Veranschaulichung von Ereignissen (x, y, z, t) im Raum-Zeit-Kontinuum (Minkowski-Raum):
Die Lorentz-Trafo lässt $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2$ invariant.

Lichtkegel: $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0$

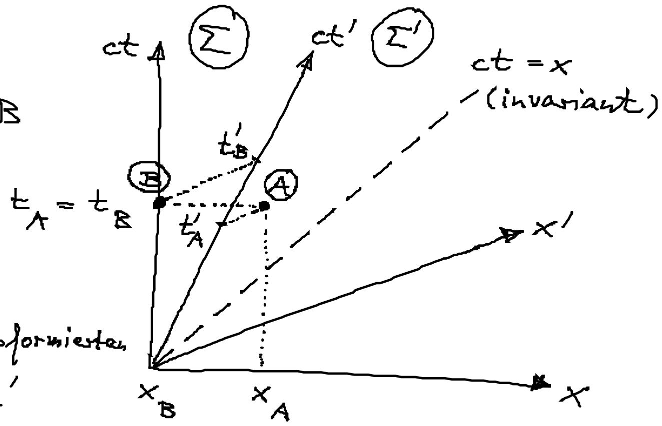


Die Bewegung eines Massenpunktes ergibt im Minkowski-Raum (ct, x, y, z) eine Weltlinie

Bei konst. Geschw.
$x = \beta ct$ Gerade (wegen $\beta < 1$ innerhalb des Lichtkegels)

Gleichzeitigkeit

Zwei Ereignisse A, B an Orten x_A, x_B seien gleichzeitig in Σ.
Im Lorentz-transformierten Inertialsystem Σ'



$$\begin{pmatrix} x'\text{-Achse}: t'=0 \Rightarrow x = \frac{1}{\beta} ct & \Rightarrow ct = \beta x < x \\ ct'\text{-Achse}: x'=0 \Rightarrow x = \beta ct & \Rightarrow ct = \frac{1}{\beta} x > x \end{pmatrix}$$

sind sie <u>nicht mehr gleichzeitig</u>

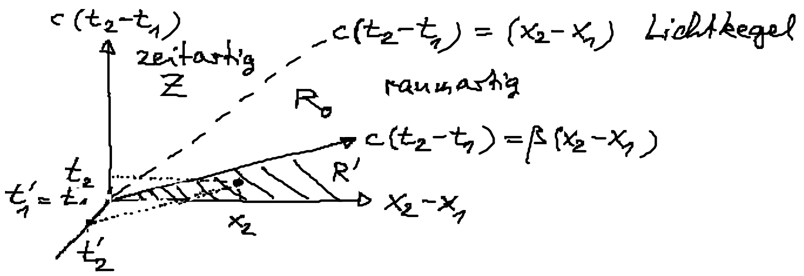
Kausalitätsprinzip

Reihenfolge zweier Ereignisse an den Orten x_1, x_2 in Σ: $t_1 < t_2$

Reihenfolge in Σ':

$$t_2' - t_1' = \gamma\left[(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)\right] \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{falls} \\ \text{"} \end{matrix} \quad c(t_2 - t_1) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \beta (x_2 - x_1)$$

Für <u>raumartige</u> Ereignisse $c(t_2 - t_1) < (x_2 - x_1)$ lässt sich eine Lorentz-Trafo finden, so dass beide Ereignisse gleichzeitig sind $\left(\beta = \frac{c(t_2 - t_1)}{x_2 - x_1}\right)$ oder die Reihenfolge sogar umgedreht wird $\left(\beta > \frac{c(t_2 - t_1)}{x_2 - x_1}\right)$ für alle Ereignisse $(x_2, t_2) \in R'$



Aber:

- Nur <u>zeitartige</u> Ereignisse können sich kausal beeinflussen, da eine Signalübertragung mit $v \leq c$ möglich ist; deren Reihenfolge wird nicht geändert, also <u>kein Widerspruch zum Kausalitätsprinzip</u>.
- Raumartige Ereignisse können sich nicht kausal beeinflussen.

Formalisierung der Weltlinien

Der raum-zeitliche Abstand ds

$$(ds)^2 := (c\,dt)^2 - (d\underline{r})^2$$

bleibt invariant bei Lorentz-Trafo zwischen Inertialsystemen.

Schreibe $(ds)^2$ als Skalarprodukt von Vierervektoren (Zeit - Ort) im Minkowski-Raum V und stelle die Lorentz-Trafo als lineare orthogonale Trafo in V dar, die das Skalarprodukt invariant lässt:

Def.: kontravariante Komponenten des Vierervektors

$$x^0 := ct$$

x^i, $i = 1,2,3$: kartes. Komp. des Ortsvektors $\underline{r}$

$$\Rightarrow (ds)^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

nichteuklidisches Skalarprodukt!

(Euklid. Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit euklid. Metrik:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \underbrace{(x,y,z)}_{\text{Zeilenvektor}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{metrischer} \\ \text{Tensor}}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{Spaltenvektor}}$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} = (\mathbb{1})_{ij}$$)

hier:

nichteuklid. Raum V, metr. Tensor:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Damit lässt sich schreiben:

$$(ds)^2 = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} dx^\mu g_{\mu\nu} dx^\nu$$

Vereinfachung durch $dx_\mu := \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} dx^\nu$

Def.: kovariante Komponenten des Vierervektors

$$\boxed{\begin{aligned} x_0 &:= x^0 \\ x_i &:= -x^i \end{aligned}} \qquad i = 1,2,3$$

$$\boxed{\begin{aligned} (ds)^2 &= dx^0 dx_0 + dx^1 dx_1 + dx^2 dx_2 + dx^3 dx_3 \\ &= \sum_{\mu=0}^{3} dx^\mu dx_\mu \equiv \underbrace{dx^\mu dx_\mu} \end{aligned}}$$

Einstein'sche Summationskonvention
wenn derselbe Index oben (kontravar.) und
unten (kovar.) auftritt.

Verallg. auf beliebige Vierervektoren a^i:

$$\boxed{a_0 = a^0 \, , \quad a_i = -a^i} \qquad (i = 1,2,3)$$

Alle Lorentz-Invarianten lassen sich als
Skalarprodukte $a^\mu a_\mu$ schreiben.

Zeitartige Vierervektoren: $x^\mu x_\mu > 0$
(alle von O erreichbaren Weltvektoren

Raumartige Vierervektoren: $x^\mu x_\mu < 0$

Lorentz-Trafo (linear, homogen): $\Sigma \to \Sigma'$

$$\boxed{x'^\mu = U^\mu{}_\nu x^\nu}$$

Zeile Spalte

mit $U^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad (v \parallel x^1)$

$$x'_\mu = g_{\mu\lambda} x'^\lambda = \underbrace{g_{\mu\lambda} U^\lambda{}_\kappa g^{\kappa\nu}}_{U_\mu{}^\nu} x_\nu \, , \quad U_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kontravariant $x^\nu \in V$

kovariant $x_\nu \in \tilde{V}$ dualer Raum zu V

$\tilde{V} = \{ \text{lin. Funktional } l : V \to \mathbb{R} \}$

$\boxed{\text{„Heben oder Senken der Indizes" durch } g^{\mu\nu} \text{ bzw. } g_{\mu\nu}}$

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu \overset{\text{Heben}}{=} \underbrace{dx^\nu g_{\nu\mu}}_{dx_\mu} \underbrace{\phantom{g_{\nu\mu}} dx^\mu}_{dx_\nu} \overset{\text{Senken}}{=} dx^\nu dx_\nu \qquad g_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Mit $a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$ gilt auch

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu \qquad (g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu})$$

$$\begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$$

Invarianz des Skalarproduktes

$$\left.\begin{aligned} x'^\mu &= U^\mu{}_\nu x^\nu \\ x'_\mu &= U_\mu{}^\lambda x_\lambda \end{aligned}\right\} \quad x'^\mu x'_\mu = U^\mu{}_\nu U_\mu{}^\lambda x^\nu x_\lambda \overset{!}{=} x^\nu x_\nu$$

$$U^\mu{}_\nu U_\mu{}^\lambda = (U^T)_\nu{}^\mu U_\mu{}^\lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

transponierte Matrix: Zeilen u. Spalten vertauscht

$$U^T U = 1$$

$$U^T = U^{-1} \quad \text{d.h. } U \text{ \underline{orthogonal}}$$

Also ist $U_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & & \\ \beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

die inverse Lorentz-Trafo zu $U^\nu{}_\mu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & & \\ -\beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

$\beta \to -\beta$

Relativist. Additionstheorem der Geschwindigkeiten:

$$\beta = \frac{v_1}{c}, \quad \alpha = \frac{v_2}{c} \quad \Rightarrow \beta_{res} = \frac{v_{res}}{c} \stackrel{!}{=} \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}$$

nichtrelativist. Grenzfall ($\alpha, \beta \ll 1$): $\beta_{res} = \alpha + \beta$ (Galilei)

hochrelativist. Grenzfall ($\alpha = 1$): $\beta_{res} = \frac{1+\beta}{1+\beta} = 1$

Die Lorentz-Trafo $U(\beta)$ zur Geschw. $v = \beta c$ bilden eine Gruppe (Lorentz-Gruppe) mit der Verknüpfung

$$U(\alpha) \cdot U(\beta) = U\left(\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}\right) \quad \text{(Add. theorem)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x^\mu &= U_\nu{}^\mu x'^\nu \\ x_\mu &= U^\nu{}_\mu x'_\nu \end{aligned}}$$ inverse Trafo

Gruppenaxiome:

(i) Assoziativgesetz $U(\beta_1)\left(U(\beta_2)U(\beta_3)\right) = \left(U(\beta_1)U(\beta_2)\right)U(\beta_3)$

(ii) Es. ex. Einselement $U(0) = 1$

(iii) Zu jedem $U(\beta)$ ex. eine Inverse $U(\beta)^{-1} = U(-\beta)$