

4. Beispiel zur Zeitordnung

Literatur: R. Feynman Physical Review 84 (1951)

aus Schrödingergleichung Zeitentwicklungsoperator U bekannt:

$$U(t_1, t_2) = T \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} H(t) dt \right) \quad \text{aus } i\hbar \dot{\psi} = H(t) \psi$$

stellt Zeitordnung sicher

$$H(t) = H_0 + V(t)$$

\uparrow \uparrow
 ist lösbar Störung

$U(t_1, t_2)$ ableite mit $V(t)$ als Störung

$$U(t_1, t_2) = T e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} (H_0 + V(t)) dt} = T e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} H_0 dt} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} V(t) dt}$$

$$\approx T e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} H_0 dt} \left(1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} V(t) dt \right)$$

Aufgabe: Operatoren sind jetzt nach der Zeit zu ordnen

$$= T e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} H_0 dt} - \frac{i}{\hbar} T e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} H_0(t') dt'} \int_{t_1}^{t_2} V(t) dt$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar} H_0(t_2 - t_1)} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} dt e^{-\frac{i}{\hbar} \int_t^{t_2} H_0(t') dt'} V(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^t H_0(t') dt'}$$

$t' > t$ $t' < t$

$V(t)$ darf uns recht von $H_0(t')$ stellen,

wenn $t < t'$, daher

werden die Integralgrenzen aufgespaltet und dann zeit geordnet.

$$= e^{-\frac{i}{\hbar} H_0(t_2-t_1)} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} dt e^{-\frac{i}{\hbar} H_0(t_2-t)} V(t) e^{-\frac{i}{\hbar} H_0(t-t_1)}$$

5. Modell unabhängiger Bosonen:

Beispiel f. eine exakte, störungstheoretische Lösung

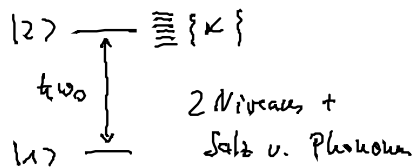
Berechnung der Dipolstärke eines Zwei-Niveau-Systems

$$\vec{P} = n_2 \vec{d}_{12} \langle a_1^\dagger a_2 \rangle + \text{h.c.}$$

↑
Anzahl dichte
(Zahl / Volumen)

\vec{d}_{12} : Dipolmoment

$\langle a_1^\dagger a_2 \rangle$: Übergangsamplitude



$$H = H_0 + V$$

$$H_0 = \sum_{e=1}^2 \hbar\omega_e a_e^\dagger a_e + \sum_{\kappa} \hbar\omega_{\kappa} b_{\kappa}^\dagger b_{\kappa}$$

$$V = \sum_{\kappa} \hbar g_{\kappa} (b_{\kappa}^\dagger + b_{\kappa}) a_2^\dagger a_1$$

Interpretation: Im Gegensatz zu Photonen (reale Übergänge) finden

hier nur virtuelle Übergänge statt: $b_{\kappa}, b_{\kappa}^\dagger$ "wachsen" am Niveau $|2\rangle$

Observable: $\langle a_1^\dagger a_2 \rangle = ?$, mittels Heisenberggleichung:

$$\frac{d}{dt} a_1^\dagger a_2 = -i\omega_0 a_1^\dagger a_2 - i \underbrace{\sum_k g_k (b_k^\dagger + b_k)}_{\phi} a_1^\dagger a_2 \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} b_k^\dagger = +i\omega_k b_k^\dagger + i g_k a_2^\dagger a_2 \Rightarrow i\omega_k b_k^\dagger \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} b_k = -i\omega_k b_k - i g_k a_2^\dagger a_2 \Rightarrow -i\omega_k b_k \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} a_2^\dagger a_2 = 0 \rightarrow a_2^\dagger a_2 = \text{konstante}$$

..... kann Separationsformuliert werden durch:

$$b_k^\dagger \rightarrow b_k^\dagger - \frac{i g_k}{i\omega_k} a_2^\dagger a_2, \quad b_k \rightarrow b_k + \frac{i g_k}{-i\omega_k} a_2^\dagger a_2$$

nach Transform. hängt die b_k 's von freier Zeit abhängigkeit \rightarrow Wickthorem giltig f. ϕ

Transform. in ϕ führt uns auf Korrelation $a_2^\dagger a_2$ Proportionalität $\rightarrow 0$

haben daher mit $a_1^\dagger a_2 = e^{-i\omega_0 t} p_{12}$ (Abspaltung des 1. Terms in (1)):

aus (1): $\dot{p}_{12}(t) = -i\phi(t) p_{12}(t)$, Modell liefert Modell unabhängiges Boson mit keiner Boson-Boson WW

5.1. Analyse der von Neumannreihe

$$\langle P \rangle_{ph} = \text{Sp}_{ph} \left(\rho_{ph} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int dt_1 \int dt_2 \dots \int dt_n T \phi(t_1) \phi(t_2) \dots \phi(t_n) \right)$$

zurucksp. \nearrow
Spur über Photonen \nearrow

↳ bringe ich die Summe um gerade Potenzen von ϕ auf: $n \rightarrow 2n$

$$= \text{Sp} \rho^4 \left(\int \rho^4 \sum_n \frac{(-i)^{2n}}{(2n)!} \int dt_1 \dots \int dt_{2n} T \phi(t_1) \dots \phi(t_{2n}) \right)$$

Zeitintegrale nicht explizit mit schreiben: mit dauern, $\text{Sp}(\rho^4 \dots) = \langle \dots \rangle$

$$n=0: \underline{1}$$

$$n=1: \frac{(-i)^2}{2!} \langle T \phi(t_1) \phi(t_2) \rangle = -\frac{1}{2} D(t_1 - t_2) \quad \begin{array}{l} \text{"Baustein" aus} \\ \text{"Lehr VL"} \end{array}$$

$$n=2: \frac{(-i)^4}{4!} \langle T \phi(t_1) \phi(t_2) \phi(t_3) \phi(t_4) \rangle = \text{Wick Theorem}$$

sind paarweise zu bilden zu zwei Bausteinen

$$= \frac{(-i)^4}{4!} \left(\begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \\ + \quad \text{---} \quad \text{---} \\ + \quad \text{---} \quad \text{---} \end{array} \right) = \frac{1}{4!} \cdot \left(\begin{array}{c} \text{---}^2 \\ + \text{---}^2 \\ + \text{---}^2 \end{array} \right) = \frac{3}{4!} \left(\text{---} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2!} \left(\frac{\text{---}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2!} \left(\frac{\text{---}}{2} \right)^2 = \frac{(-i)^4}{2!} \left(\frac{D(t_1 - t_1)}{2} \right)^2$$

$$\underline{u=3}: \frac{(-i)^6}{6!} \langle T \phi(t_1) \phi(t_2) \phi(t_3) \phi(t_4) \phi(t_5) \phi(t_6) \rangle$$

$$= \frac{(-i)^6}{3!} \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} \left(\begin{array}{c} \text{diagram with 6 dots and 3 arcs} \end{array} \right) = \frac{(-i)^6}{3!} \frac{15}{4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \left(\text{diagram with 2 dots and 1 arc} \right)^3$$

6-1 Mgl. das erste zu binden
 6-3 Mgl. das zweite zu binden
 6-5 Mgl. die letzten beiden zu binden
 5 · 3 · 1 Mgl. für letztes

$$= \frac{(-i)^6}{3!} \left(\frac{\text{diagram with 2 dots and 1 arc}}{2} \right)^3$$

u-beliebig

$$\frac{(-i)^{2u}}{(2u)!} \langle T \phi(t_1) \dots \phi(t_{2u}) \rangle$$

$$\frac{(-i)^{2u}}{(2u)!} \left(\text{diagram with 2 dots and 1 arc} \right)^u \frac{(2u)!}{u! 2^u} = \frac{(-1)^u}{u!} \left(\frac{\text{diagram with 2 dots and 1 arc}}{2} \right)^u$$

↑
wieviele von denen folgt's?

$$(2u-1) \cdot (2u-3) \dots 3 \cdot 1$$

analog u=3

$$\frac{(2u)!}{u! 2^u}$$

der u -te Term ist: $\frac{1}{u!} \left(-\frac{\dots}{2}\right)^u$: u -te Term e'w
Exp. Fäll'g

Die Gesamtlösung ist:

$$\langle a_1^\dagger a_2 \rangle = \underbrace{\langle a_1^\dagger a_2 \rangle(0)}_{P_0} e^{-i\omega_0 t} e^{-\frac{1}{2} \int_{t_1}^t \int_{t_2}^t \langle T \phi(t_1) \phi(t_2) \rangle} e$$

D(t₁-t₂)
Phonon propagator

Integrale können mit Standardmethoden berechnet werden

5.2. Diskussion :

$$\langle a_1^\dagger a_2 \rangle(t) = P_0 e^{-i\omega_0 t} \exp\left(i \sum_k \frac{g_k^2}{\omega_k} t - \sum_k \frac{g_k^2}{\omega_k^2} \left\{ (1+u_k)(1-e^{-i\omega_k t}) + u_k(1-e^{i\omega_k t}) \right\}\right)$$

n u_k induziert
spontane Prozesse

u_k : Phonon besetz. - Bose verteilg. $1/(e^{\beta \hbar \omega_k} - 1)$

- offensichtlich durch Frequenzverschiebung auf:

$$\omega_0 \rightarrow \omega_0 - \sum_k \frac{g_k^2}{\omega_k} = \tilde{\omega}_0 : \text{Frequenzverschiebung} \cdot \text{Rotverschiebung}$$

- Modifikation der freien Oszillation $e^{-i\tilde{\omega}_0 t - \phi(t)}$ und

Funktion $\phi(t) \rightarrow$ beinhaltet Vielfache der ω_k :

$$e^{i\omega_k t} \rightarrow \sum_n \frac{1}{n!} e^{in\omega_k t}$$

↓ elektronischer Übergang wird "angezogen" (dressed) mit
 n -Phononprozessen \Rightarrow neues Quantenzustand "Polaron"

- Aktivität der Phononen v. T bestimmt über n_x

Hochtemperaturfall $\beta \rightarrow 0$, $n_x \approx \frac{1}{1 + \beta \hbar \omega_x - 1} = \frac{kT}{\hbar \omega_x} \sim T$

Tiefstemperaturfall $\beta \rightarrow \infty$, $n_x \rightarrow 0$, $\exists \ll 1^q \hat{=} \text{spontane Phononemission}$

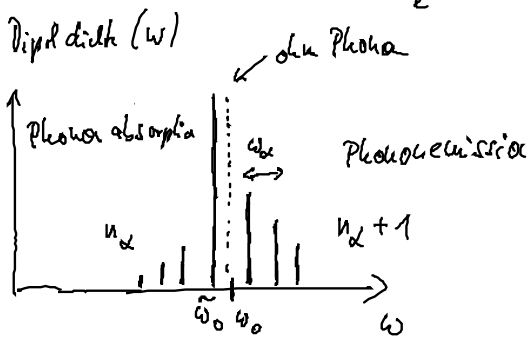
- Bsp 1 Mode α , typisch für Molekül

viele Moden: Festkörper (akust./optisch)

Idee: alle E-Funktionen nach $e^{i\omega_x t} \dots \sum_n \frac{1}{n!} e^{in\omega_x t}$ umschreiben

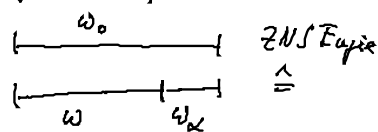
$$\langle a_1^\dagger a_2 \rangle(\omega) = \sum_e c_e \delta(\omega - \tilde{\omega}_0 - e\omega_x) \quad \text{f. f. f. } \alpha$$

c_e : Koeffizient, von T abhängig



\sim Lichtabsorption

Phononabsorption



ausgestrahlt vorhanden $\sim n_x$

Phononemission

