

Clebsch Gordan Koeffizienten:

$$\underline{\underline{|SM_S\rangle}} = \sum_{m_{S_1}, m_{S_2}} \underbrace{\langle m_{S_1}, m_{S_2} | SM_S \rangle}_{\text{C-G-Koeff.}} \underline{\underline{|m_{S_1}, m_{S_2}\rangle}}$$

C-G-Koeff.: sind gesucht

2 Gleichungen f. den Bestimmung:

$$a) \langle SM_S | \hat{S}^3 | m_{S_1}, m_{S_2} \rangle = \langle SM_S | \frac{1}{4} M_S | m_{S_1}, m_{S_2} \rangle$$

$$b) \langle SM_S | \hat{S}^2 | m_{S_1}, m_{S_2} \rangle = \langle SM_S | \frac{1}{4} S(S+1) | m_{S_1}, m_{S_2} \rangle$$

Bsp: $|0,0\rangle$

$$a) \langle 0,0 | \hat{S}^3 | m_{S_1}, m_{S_2} \rangle = 0 \quad \text{wg } M_S = 0$$

jetzt noch rech. anwenden: $\hat{S}^3 = \hat{S}_1^3 + \hat{S}_2^3$

$\uparrow \quad \uparrow$
 Teil 1 und 2

$$\langle 0,0 | \hat{S}_1^3 + \hat{S}_2^3 | m_{S_1}, m_{S_2} \rangle = 0$$

$$\hat{S}_i^2 | m_{S_1}, m_{S_2} \rangle = \hat{S}_i^2 | m_{S_1} \rangle | m_{S_2} \rangle = ?$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $+\frac{1}{2} \quad +\frac{1}{2}$

$$(i) \hat{S}_{i=1}^3 | \frac{1}{2} \rangle_1 | \frac{1}{2} \rangle_2 = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2}_{\text{wirkt nur auf } |1\rangle}$$

$$\downarrow$$

$$| \frac{1}{2} \rangle_1 | \frac{1}{2} \rangle_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2$$

$$\hat{S}_2^3 | \frac{1}{2} \rangle_1 | \frac{1}{2} \rangle_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2$$

oben einsetzen:

$$0 = \langle 0, 0 | \hat{S}_1^3 + \hat{S}_2^3 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle = \frac{1}{2} \underbrace{\langle 0, 0 | \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=0 \text{ als } G\text{-}f\text{-}k.}$$

analyse Ridge. f. $| -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle$:

$$| -\frac{1}{2} \rangle_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_i \rightarrow -\frac{1}{2} \langle 0, 0 | -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle = 0$$

\Rightarrow 2 G-f-k sind Null, $\langle 0, 0 | \uparrow\uparrow \rangle = 0 = \langle 0, 0 | \downarrow\downarrow \rangle$

$$(ii) \text{ aus (a) } 0 = \langle 0, 0 | \hat{S}_1^3 + \hat{S}_2^3 | +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle$$

$$= \langle 0, 0 | +\frac{1}{2} - \frac{1}{2} | +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle = 0$$

Keine Aussage mgl., analog $| -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \rangle$

$$b) \langle 0, 0 | \hat{S}^2 | u_{S_1} u_{S_2} \rangle = 0$$

$$\langle 0, 0 | \left(\hat{S}_1 + \hat{S}_2 \right)^2 | u_{S_1} u_{S_2} \rangle =$$

$$\langle 0_1 0 | \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + 2 \hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2 | u_{S_1} u_{S_2} \rangle =$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\hbar^2 S_1(S_1+1) \\ \hbar^2 S_2(S_2+1)}} \uparrow \uparrow$$

$$\langle 0_1 0 | \frac{3}{4} \hbar^2 + \frac{3}{4} \hbar^2 + 2 \hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2 | u_{S_1} u_{S_2} \rangle =$$

$$\frac{3}{2} \hbar^2 \langle 0_1 0 | u_{S_1} u_{S_2} \rangle + 2 \langle 0_1 0 | \hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2 | u_{S_1} u_{S_2} \rangle =$$



$$2 \langle 0_1 0 | \hat{S}_1^1 \hat{S}_2^1 + \hat{S}_1^2 \hat{S}_2^2 + \hat{S}_1^3 \hat{S}_2^3 | u_{S_1} u_{S_2} \rangle$$

Eigenwertproblem
wird bekannt
 $\hbar u_{S_1} \cdot \hbar u_{S_2} | u_{S_1} u_{S_2} \rangle$

brauche folgend. f. $|\uparrow\downarrow\rangle = |+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$

\uparrow \downarrow
 u_{S_1} u_{S_2}

$$\rightarrow \hat{S}_1^1 \hat{S}_2^1 |+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \frac{\hbar^2}{4} |-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle$$

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_1 \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2$$

$$\hat{S}_1^2 \hat{S}_2^2 |+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \frac{\hbar^2}{4} |-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle$$

$$\Downarrow \langle 0,0 | 2 \vec{\hat{s}}_1 \cdot \vec{\hat{s}}_2 | \uparrow \downarrow \rangle = 2 \langle 0,0 | \frac{t^2}{4} + \frac{t^2}{4} | \downarrow \uparrow \rangle + 2 \langle 0,0 | -\frac{t^2}{4} | \uparrow \downarrow \rangle$$

$$\Downarrow 0 = \langle 0,0 | \vec{\hat{s}}_1^2 + \vec{\hat{s}}_2^2 + 2 \vec{\hat{s}}_1 \cdot \vec{\hat{s}}_2 | \uparrow \downarrow \rangle$$

$$0 = t^2 \langle 00 | \downarrow \uparrow \rangle + t^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 \langle 00 | \uparrow \downarrow \rangle$$

$$\langle 00 | \downarrow \uparrow \rangle = - \langle 00 | \uparrow \downarrow \rangle$$

f. antiparallele Spin ist Vorzeichen verschieden

$$\Downarrow |0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} | \uparrow \downarrow \rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} | \downarrow \uparrow \rangle$$

← wg. Normierung.

C-g-Darstellg. von $|0,0\rangle$

alle andere analog.

3.5. Zusammenfassung zu Vielteilchenzuständen

Start: Mode des Pauli-felds / Schrödingerfeld

$$\vec{\varphi}_{\text{part}} = \sum_{\lambda} \underbrace{\vec{\varphi}_{\lambda}(\vec{r}, t)}_{\text{Eigenfunktionen von } H_0^{(1)}} a_{-\lambda}(t)$$

sind 2er Spinoren

aus Pauli-gleichg: $\vec{\psi}(\vec{r}, \vec{s}) = \sum_{m_s = \pm \frac{1}{2}} \underbrace{\vec{\chi}_{m_s}(\vec{s})}_{\text{Spin-Komponente}} \psi^{m_s}(\vec{r})$ QM I

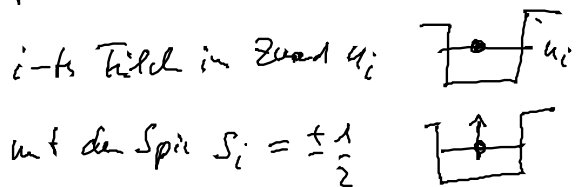
$= \sum_{m_s} \vec{\chi}_{m_s}(\vec{s}) \sum_u c_u^{m_s} \psi_u^{m_s}(\vec{r})$
 Etw. in Sp. filternsystem einer H_0 der von Ort abhängt

$= \sum_{u, m_s} c_u^{m_s} \underbrace{\vec{\chi}_{m_s}(\vec{s}) \psi_u^{m_s}(\vec{r})}_{\text{Erweiterung basis f. Operatoren}}$

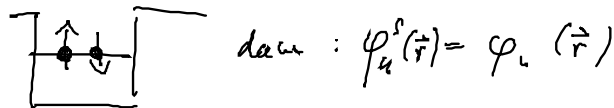
$\vec{\psi}_\lambda = \vec{\varphi}_{m, m_s}$

and Darstellg. $\equiv \vec{\chi}_s \varphi_u^s \quad (s \equiv m_s)$

f. viele Teilchen $\equiv \vec{\chi}_{s_i}(s_i) \varphi_{u_i}^{s_i}(\vec{r}_i) \equiv \varphi_{u_i}^{s_i}(\vec{r}_i)$
 (viele Bücher verwenden die Notation) $= \varphi_i(i)$ "Spin-Bahn Orbitale"



wenn der Ortszustand nicht von Spin abhängt



↪ Kurznotation f. Fermion / Boson

Fermion: Slaterdeterminante:

$$\phi_F(1 \dots i, \dots N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_1(2) & \dots & \varphi_1(N) \\ \varphi_2(1) & \varphi_2(2) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_N(1) & \dots & \dots & \varphi_N(N) \end{vmatrix}$$

N-Teilchen

antisymmetrisch: Antisymmetrie, Pauliprinzip

Boson:

$$\phi_B(1 \dots i, \dots N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \frac{1}{\sqrt{k!}} \sum_{\text{alle Permutationen des Quotienten}} P \{ \varphi_1(1) \dots \varphi_i(i) \dots \varphi_N(N) \}$$

Teilchenzahl
Kombination

Warnung: falls Teilchen in denselben Zustand sind:

sind in ϕ f. $k < N$ verschiedene Orbitale besetzt,
so ist N_i die Teilchenzahl im i -ten Orbital

Bsp. 2 Teilchen: $\phi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{matrix} \text{Kombi.} \\ \text{keine} \\ \text{Kombi.} \end{matrix} (\varphi_1(1) \varphi_2(2) \pm \varphi_2(1) \varphi_1(2))$

↑ ↑ ↑
Fermion Boson

2 Teilchen in dasselbe Orbital: $1=2$

$$\phi_F = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1(1) \varphi_1(2) - \varphi_1(1) \varphi_1(2)) = 0$$

$$\phi_D = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\underbrace{\psi_1(1)}_{\substack{\uparrow \\ \text{2 Teil} \\ \text{in Orbital 1}}} \underbrace{\psi_1(2)}_{\substack{\uparrow \\ \text{2 Teil} \\ \text{in Orbital 1}}} + \psi_1(1)\psi_1(2) \right)$$

$$= \psi_1(1)\psi_1(2) \neq 0$$

4. Quantisierung d. Maxwellfeld

4.1. Feldquantisierung über Lagrange dichte

a) Lagrange dichte "raten" und dann bestätigen

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\epsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r}, t)}_{\text{el. Feld}} - \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\vec{B}^2(\vec{r}, t)}_{\text{magn. Feld}} \right) \quad \begin{array}{l} H = T + V \\ L = T - V \end{array}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

ohne Quellen im freien Raum $\phi = 0$

Feldvariablen: $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) \Rightarrow E, B$ beliebar

Lagrange glied. f. x-Komponente von \vec{A}

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_x} - \sum_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_x)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_x} = 0$$

$$0 + \frac{1}{\mu_0^2} \sum_u \partial_u^2 \sum_e \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{A})_e}_{\substack{\text{äußere Ableitung} \\ \vec{B}}} \cdot \partial_{Ax|u} \underbrace{(\epsilon_{ejk} \partial_j A_k)}_{\substack{j=u \\ k=x}} - \epsilon_0 \dot{A}_x = 0$$

$\vec{B}_e = (\text{rot } \vec{A})_e$

$$\frac{1}{\mu_0} \sum_{u,e} \partial_u B_e \epsilon_{euk} + \epsilon_0 \partial_t \bar{E}_x = 0$$

$\epsilon_{xex} = -\epsilon_{xue}$

$$- \frac{1}{\mu_0} \sum_{u,e} \epsilon_{uke} \partial_u B_e$$

$$- \frac{1}{\mu_0} (\text{rot } \vec{B})_x + \epsilon_0 \partial_t \bar{E}_x = 0$$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E} \quad \checkmark$$

daher ist \mathcal{L} bestätigt.

b) Impuls π_{A_i} festlegen:

$$\pi_{A_x} = \partial_{\dot{A}_x} \mathcal{L} = \sum_i \frac{\epsilon_0}{2} (\dot{A}_i)^2 = \epsilon_0 \dot{A}_x = -\epsilon_0 E_x$$

→ kanonisch Variable paar ist A_x, E_x bzw. \vec{A} und \vec{E} .

c, d) Operate zu finden, Vertauschungsrelation definieren

$$\left[\underset{\substack{\uparrow \\ x_i, y_i, z_i}}{\underline{A}_e(\vec{r}_i, t)}, \underline{E}_m(\vec{r}'_i, t) \right] = \frac{i}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta_{em} \quad \text{noch falsch!}$$

Beweis unp. nicht konjugiert gerade

im Moment wird die Bedingung $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ im Vakuum nicht eingehalten, Vertauschungsrelation verletzt diese Relation

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta_{em} \rightarrow \underline{F}_{em}(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta_{em} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

„muss als Deltafunktion“: $\delta_{\vec{r}}(\vec{r} - \vec{r}') \delta_{em}$

Beweis am Ende von Abschnitt 4.1.

e) Hamiltons dichte / Operator

$$\begin{aligned} \underline{H} &= -\vec{A} \cdot \vec{E} \epsilon_0 - \mathcal{L} = \epsilon_0 \vec{E}^2 - \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \underline{H} = \int d^3\vec{r} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}(\vec{r}, t)^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}(\vec{r}, t)^2 \right)$$

f) Bewegungsgleichungen f. \vec{A} :

Heinberg Bewegungsgleichungen aufstellen $\rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) \rightarrow$ Erregerbewerte

$$\square \vec{A} = 0 \quad (\text{ohne Beweis}) \quad \text{analog} \quad \psi^+(\vec{r}, t) : \text{Schrödinger gl.}$$

g) Entwicklung nach Feldmoden:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_n \vec{u}_n(\vec{r}) c_n(t) + \text{h.a.}$$

weil Feld reell

$$\text{Bose operatoren: } [c_n, c_m^\dagger]_- = \delta_{nm}$$

vollständiges Funktionensystem $\{ \vec{u}_n(\vec{r}) \}$

analog zur stationären Schrödinger gl. verwendet man die
 feldg. $\square \vec{A} = 0$ mit stationärer Ansatz $\vec{A} = \vec{u}(\vec{r}) e^{-i\omega t}$

$$\rightarrow \text{Helmholtzgleichung: } \Delta \vec{u}(\vec{r}) = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{u}(\vec{r})$$

Eigenwertproblem mit ω_n, \vec{u}_n
 \nearrow
 Querschnitte