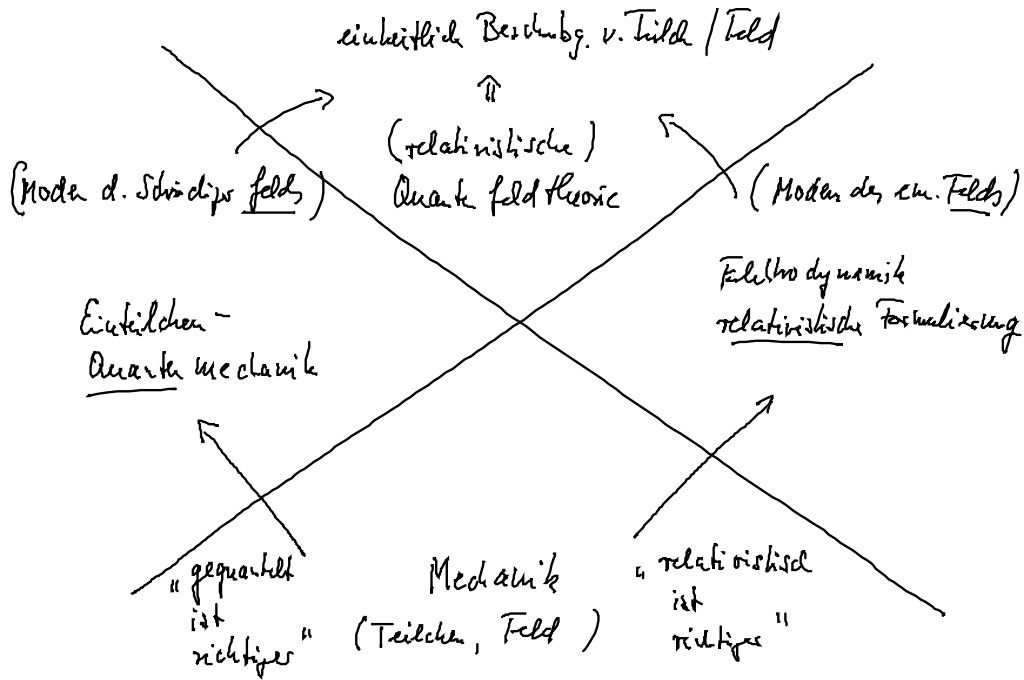


0) Ziel der Vorlesung

Skizze d. VL / Physik



in 3. Dimension: statische Physik

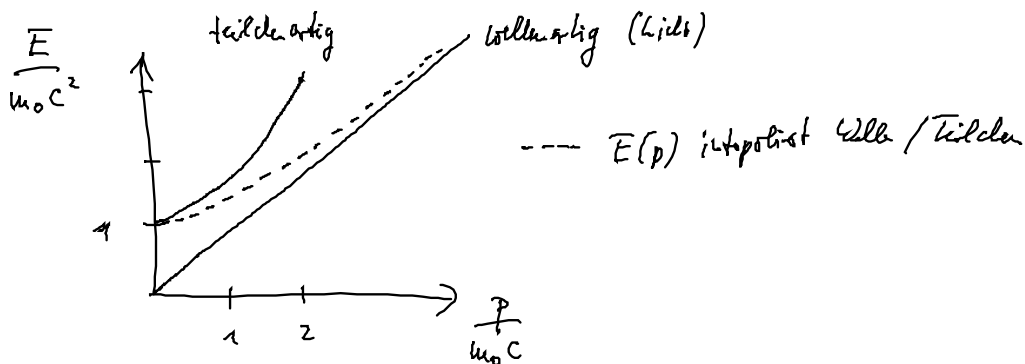
verbindendes Element: relativist. Energie-Impuls beziehung.

$$E = (m_0^2 c^4 + c^2 p^2)^{1/2} = E(p) \quad (\text{bzw. } \omega = \omega(\vec{k}))$$

$$\approx \begin{cases} m_0 c^2 + \frac{p^2}{2m_0} & , \quad p \ll m_0 c \quad \hat{=} \text{ Ruheenergie + Schrödinger Dispers.} \\ c p & , \quad p \gg m_0 c \quad \hat{=} E = pc, \omega = ck \text{ Lichtdispersion} \end{cases}$$

m_0 : Ruhemasse

Dispersion erhält Teilchen und Wellen Aspekte



Z. Historisches

- Wolke:
- SRT: Einstein 1905
 - Wellen / Matrixmechanik: Schrödinger / Heisenberg 1925
 - Unschärferelation: Heisenberg 1927
 - Wahrscheinlichkeitsinterpretation 1927

- Wolke:
- relativistische Wellenmechanik
 - Klein-Gordon-Gleichung: 1926 \rightarrow Spin 0
 - Dirac-Gleichung: 1927 \rightarrow Spin $\frac{1}{2}$
 - Quantisierung des Wellenfeldes: Heisenberg, Pauli 1927
 - QED: Feynman, Tomonaga, Schwinger 1945
Bethe, Lamb, Weisskopf 1947
 - Vielteilchentheorie: Hartree 1935
Kohn 1965
 - Quantenoptik: Glauber 1963

- Versteckte Parameter : Bell 1964
- Masse der Elementarteilchen : Higgs 1964
- Quanten computing / information
 - Kryptographie Bennett 1984
 - Technisierung, Shor 1994

I.) Relativistische Wellengleichungen

Schrödingergleichg. $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{r}, t)$

Kombination von 1. Zeit- und 2. Ortsableitg.

unfaire Behandlg. v. Zeit / Ort \Rightarrow nicht Lorentzinvariant

Zugeh. zur Reparatur:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2}}_{K-G-Gl.} \quad \text{oder} \quad \underbrace{\vec{\nabla}^2 \rightarrow \vec{\nabla}}_{D-Gl.}$$

1.) Klein-Gordon Gleichung

1.1.) Herleitung geht schief

$\left\{ \begin{array}{l} E \rightarrow i\hbar \partial_t, \quad \vec{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \quad \text{als Ersetzung in} \\ \text{die Broglie relation } E\psi = \frac{\vec{p}^2}{2m_0} \psi \quad \text{föhrt man Schrödingergleichung.} \end{array} \right.$

analog wenn Anwendung von relativistischer $E = E(p)$

$$\rightarrow E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad | \cdot \psi$$

$$\downarrow -\hbar^2 \partial_t^2 \psi = \left(-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m_0^2 c^4 \right) \psi$$

$$\boxed{\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \lambda_c^{-2} \right) \psi(\vec{r}, t) = 0 \quad \text{Klein-Gordon-Gleichung}}$$

$$\lambda_c = \frac{\hbar}{m_0 c} \quad \text{Compton-Wellenlänge}$$

Bemerkung:

- Spin 0-Teilchen analog zur skalaren Schrödingergleichung (Boson)
- wird Ladungsfreiheitsgrad bringe \rightarrow geladen / ungeladen Bosonen
- relativistisch invariant, dem Wellengenerator \square

- Compton - λ_c Interpretation

WW - über Eichboson vermittelt z.B. zwischen Fermionen
eine stationäre Lösung in Kugelkoordinaten von ψ

$$\psi \sim \frac{e^{-r/\lambda_c}}{r} \Rightarrow \lambda_c \text{ beschreibt Abklingkonstante des WW}$$

$$\lambda_c = \frac{\hbar}{m_0 c} \rightarrow m_0 \uparrow \Rightarrow \lambda_c \downarrow \hat{=} \text{elektroschwaches WW}$$

$$\rightarrow m_0 \rightarrow 0 \Rightarrow \lambda_c \rightarrow \infty \hat{=} \text{Photon}$$

$$W_0\text{-Boson: } \lambda_c = 10^{-3} \text{ fm}, \quad m_0 = 80 \frac{\text{GeV}}{c^2} \text{ des elektroschwachen WW}$$

off K-G.-gl. in relativistischer Notation:

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + \lambda_c^{-2} \right) \psi(x^\mu) = 0 \quad (\text{Summenkonvention})$$

$$\vec{x}^\mu = (ct, x_1, x_2, x_3) \quad \vec{x}_\mu = (ct, -x_1, -x_2, -x_3)$$

$$\vec{\partial}_\mu = (\partial_{ct}, \partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}) \quad \vec{\partial}^\mu = (\partial_{ct}, -\partial_{x_1}, -\partial_{x_2}, -\partial_{x_3})$$

μ : griechisch $\rightarrow 0-3$, lateinisch $\rightarrow 1-3$.

1.2. Kontinuitätsgleichung

$$\text{Schrödinger /} \quad \partial_t \rho(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0$$

Born:

$$\rho = |\psi(\vec{r}, t)|^2 \geq 0 \text{ Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte}$$

(AWD)

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2m_0 i} \left(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right) \quad \text{Wahrscheinlichkeitsstrom}$$

kann man Kontinuitätsgleichung f. K-f.-gl. aufstellen?

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + \lambda_c^{-2} \right) \psi(x) = 0$$

WA: konjugierte Gleichung, jeweils mit ψ^* bzw. ψ multiplizieren, voneinander abziehen:

$$\partial_\mu \left(\psi^* \partial^\mu \psi \right) - \partial_\mu \left(\psi \partial^\mu \psi^* \right) = 0$$

gesuchte Gleichung hierher und multiplizieren mit $\frac{i\hbar}{2m_0}$

$$\partial_\mu \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0, \quad \text{mit}$$

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m_0 c^2} \left(\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^* \right) \quad \text{mit } \psi(\vec{r}, t), \rho(\vec{r}, t)$$

$$j_i = \frac{\hbar}{2m_0 i} \left(\psi^* \partial_i \psi - \psi \partial_i \psi^* \right)$$

ρ kann nicht als AWD interpretiert werden,

weil $\rho \geq 0$ sein kann (z.B. über AB der K-f.-gl. kann immer $\rho < 0$ gefunden werden)

Idem später: kann ρ mit der Elementarladung $e > 0$ multipliziert werden und als Ladungsdichte interpretiert werden?

1.3. Lösung der K-f.-Gleichung

Ausatz: ebene Welle

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{p}} A(\vec{p}) \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r} - E(p)t)}}_{\text{Partikuläre Lösung}} \quad \text{mit } E = E(p)$$

Gesamtlösung als Superposition

Ausatz einsetzen: vollständiges System v. ebenen Wellen

$$-\frac{\hbar^2 \vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{c^2} \frac{E^2}{\hbar^2} - \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} = 0 \quad \rightarrow \quad E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2 \quad \checkmark$$

$$\text{mit } E(p) = \pm m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}} \equiv E_{\pm}(p) = \pm |E(p)|$$

Bemerkungen:

- ebene Wellen sind Lösungen, aber es gibt zu jedem Impuls \vec{p} 2 Lösungen

$$\psi_{\pm}(\vec{p}) = A_{\pm}(\vec{p}) e^{\frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r} - E_{\pm}(p)t)}$$

- offensichtlich ist Parameter $E \leq 0$ ungl., dh. Interpretation als Energie zunächst problematisch, es wird gezeigt daß f. ψ_+ und ψ_- die Energie der Teilchen $\hbar |E(p)|$ ist.

- ψ_{\pm} wird später als Teilchen / Antiteilchenpaar interpretiert
- jede relativ. Theorie ist sofort Vielteilchen Theorie!

1.4 Energie des Klein-Jordan Felds

da $\bar{E}_\pm(p)$ nicht als Energie interpretierbar, muss die Energie u. ψ_t anders bestimmt werden, über $H = E$.

$$\text{z.B. em. Feld: } w_{em} = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \rightarrow w_{KG} = f(\psi)$$

Ziel: Hamiltonformulierung f. ψ

a) Rate der Lagrange dichte

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \psi^*)$$

$$\vec{p} = (\partial_{ct}, \partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\mu_0} \left(\partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi - \lambda_c^{-2} \psi^* \psi \right)$$

rate

b) Bedingung der Lagrange dichte

$$\partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \psi^*)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = 0$$

$$\text{ÜA: } \mathcal{L} \text{ einsetzen} \rightarrow \partial^\mu \partial_\mu \psi + \lambda_c^{-2} \psi = 0$$

↓ \mathcal{L} ist unempfindlich.

c) Bestimmen der Hamilton dichte über Impulse d. Felds

$$\bar{\pi}_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)}$$

$$\bar{\pi}_{\psi^*} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi^*)}$$

$$\text{damit} \quad \mathcal{H}(\bar{\pi}_\psi, \bar{\pi}_{\psi^*}, \psi, \psi^*) = \bar{\pi}_\psi \partial_0 \psi + \bar{\pi}_{\psi^*} \partial_0 \psi^* - \mathcal{L}$$