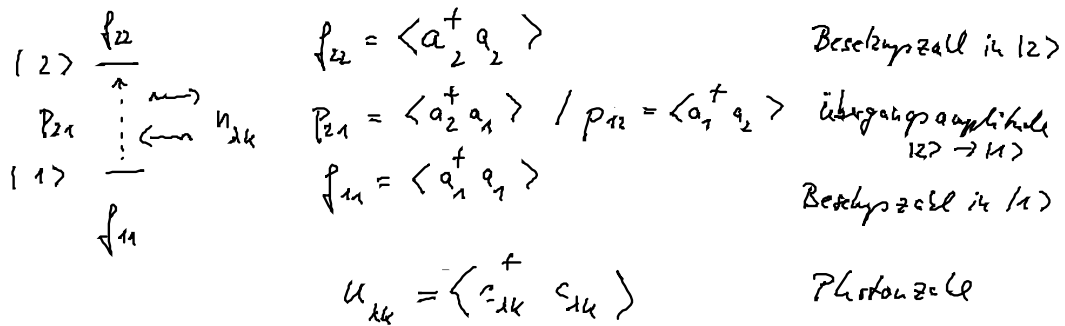


## 2. Zweiniveausystem und quantisiertes Feld

Zweiniveausystem (ZNS) f. elektronische System + vollquantisiertes Feld in niedrigster Näherung



Kann man die Dysonal auf diese Größe reduzieren?

### 2.1. Rotating Wave Approximation / Drehwellennäherung

Idee: nichtresonante Terme in  $H$  weglassen

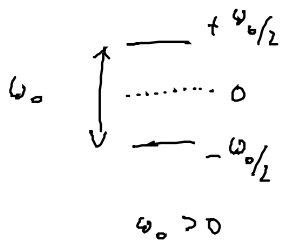
$$H_{d-ph} = - \sum_{\lambda k} \sum_{u_1, u_2} t_{\lambda k} g_{u_1 u_2}^{k\lambda} a_{u_1}^\dagger a_{u_2} c_{\lambda k} + h.c.$$

$$ZNS: \{u_1, u_2\} = \{1, 2\} \quad \text{mit } g_{u_1 u_2} \neq 0 \text{ nur für } u_1 \neq u_2$$

$\Rightarrow$  4 Terme in  $H_{d-ph}$

Resonanzbedingung über freie Bewegung:  $\dot{c}_{\lambda k} = -i\omega_{\lambda k} c_{\lambda k} \rightarrow c_{\lambda k} \approx c_{\lambda k}(0) e^{-i\omega_{\lambda k} t}$

$$c_{\lambda k}^{\dagger} \approx c_{\lambda k}^{\dagger}(0) e^{+i\omega_{\lambda k} t}$$



$$\begin{cases} \frac{d}{dt} a_1^{\dagger} a_2 = i(\omega_1 - \omega_2) a_1^{\dagger} a_2 \\ a_1^{\dagger} a_2 = a_1^{\dagger}(0) a_2(0) e^{i(\omega_1 - \omega_2) t} \end{cases}$$

$$\omega_1 - \omega_2 = -\frac{\omega_p}{2} - \frac{\omega_p}{2} = -\omega_p$$

fehlt in Resonanzform mit Ausnahme:

$$H_{el-ph} = -\sum_{\lambda k} \left( \hbar g_{12}^{k\dagger} a_1^{\dagger} a_2 c_{\lambda k}^{\dagger} + \hbar g_{21}^{k\dagger} a_2^{\dagger} a_1 c_{\lambda k} \right)$$

Sind die reson. Terme:  $e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega_{\lambda k} t} \approx 1$

and Terme:  $e^{-i\omega_0 t} e^{-i\omega_{\lambda k} t} \approx e^{-i2\omega_0 t} \rightarrow 0$

$\Rightarrow$  RWA ist us gut wenn man an Resonanzeffekten interessiert ist.

## 2.2. Observable d. Elektron-Photon Kopplung

Heisenberggleichung:  $\dot{\underline{O}} = \frac{i}{\hbar} [\underline{H}, \underline{O}]$  f. Operatoren ohne explizite  $t$ -Abhängig.

(i) Übergangsamplitude  $a_1^{\dagger} a_2 = 0$

$$\frac{d}{dt} \langle a_1^\dagger a_2 \rangle = i(\omega_1 - \omega_2) \langle a_1^\dagger a_2 \rangle + \frac{i}{\hbar} \langle [H_{\text{d-ph}}, a_1^\dagger a_2] \rangle$$

$$\frac{i}{\hbar} \langle [H_{\text{d-ph}}, a_1^\dagger a_2] \rangle = -i \sum_{jk} g_{jk}^{k1} \langle [a_2^\dagger a_1, a_1^\dagger a_2] \rangle$$

$$\langle a_2^\dagger a_1 a_1^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_2 a_2^\dagger a_1 \rangle$$

$$a_2^\dagger (1 - a_1^\dagger a_1) a_2$$

$$\underline{\underline{a_2^\dagger a_2}} - a_2^\dagger a_1^\dagger a_1 a_2$$

$$a_1^\dagger a_2^\dagger a_2 a_1$$

$$\cancel{a_1^\dagger (1 - a_2^\dagger a_2) a_1}$$

$$\langle a_2^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_1 \rangle$$

$$\frac{d}{dt} \langle a_1^\dagger a_2 \rangle = i(\omega_1 - \omega_2) \langle a_1^\dagger a_2 \rangle - i \sum_{jk} g_{jk}^{k1} \langle a_2^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_1 \rangle c_{jk}$$

freier Anteil

$\omega$ -Anteil

! Heisenbergproblem: System von Observablen ist nicht gleichzeitig

$$P_{12} \rightarrow \langle a_2^\dagger a_2 c_{jk} \rangle$$

Später Abbildbedingung nach gewählter Physik

(ii) Photon field  $c_{\lambda k}^{\dagger} c_{\lambda k}$

$$\dot{c}_{\lambda k} = -i \omega_{\lambda k} c_{\lambda k} + i g_{12}^{k\lambda} a_1^{\dagger} a_2$$

$$\dot{c}_{\lambda k}^{\dagger} = +i \omega_{\lambda k} c_{\lambda k}^{\dagger} - i g_{21}^{k\lambda} a_2^{\dagger} a_1$$

mit Produktregel  $\rightarrow$  Photon Zahl  $\dot{n}_{\lambda k} = \frac{d}{dt} (c_{\lambda k}^{\dagger} c_{\lambda k}) = \dot{c}_{\lambda k}^{\dagger} c_{\lambda k} + c_{\lambda k}^{\dagger} \dot{c}_{\lambda k}$

$$\frac{d}{dt} c_{\lambda k}^{\dagger} c_{\lambda k} = i \left( g_{12}^{k\lambda} c_{\lambda k}^{\dagger} a_1^{\dagger} a_2 - g_{21}^{k\lambda} a_2^{\dagger} a_1 c_{\lambda k} \right)$$

(iii) elektrisch Bethezahl

$$\frac{d}{dt} a_1^{\dagger} a_1 = \frac{i}{\hbar} [H_{\text{d-ph}}, a_1^{\dagger} a_1] = -i \sum_{\lambda k} g_{21}^{k\lambda} c_{\lambda k} a_2^{\dagger} a_1 + \text{h.a.}$$

Bet.  $\longrightarrow$  physikalisch klar  $\longleftarrow$  photonassimiliertes Übergang

$$\frac{d}{dt} a_2^{\dagger} a_2 = i \sum_{\lambda k} g_{12}^{k\lambda} c_{\lambda k} a_1^{\dagger} a_2 + \text{h.a.} = - \frac{d}{dt} a_1^{\dagger} a_1$$

$$\frac{d}{dt} (a_1^{\dagger} a_1 + a_2^{\dagger} a_2) = 0 \quad \stackrel{!}{=} \text{Wahrscheinlichkeitserhalt.}$$

$$a_1^{\dagger} a_1 + a_2^{\dagger} a_2 = 1 \quad \text{El. anz. sind auf } |1\rangle \text{ und } |2\rangle \text{ aufteilen}$$

$$\text{ebenso: } \frac{d}{dt} \sum_{\lambda k} c_{\lambda k}^\dagger c_{\lambda k} = - \frac{d}{dt} a_2^\dagger a_2$$

$$\frac{d}{dt} \left( \underbrace{\sum_{\lambda k} c_{\lambda k}^\dagger c_{\lambda k}}_{\text{Kohärenz}} + a_2^\dagger a_2 \right) = 0$$

Kohärenz  $\hat{=}$  Zahl der Atome im System (4ph + El in R?)

Aufgabebeding f. Photon legt diese Kohärenz fest

Erwartungswerte:

$$\dot{n}_{ph} = -\dot{f}_2 = \dot{f}_1$$

hier benötigen wir eine Gleichung um Gesamtsystem zu formulieren:

$$\text{z.B. } \dot{f}_2 = \text{bekannt} \rightarrow \dot{n}_{ph}, \dot{f}_1$$

### 2.3. Ableitung der Rategleichungen: Born-Markoffnäherung

$$\frac{d}{dt} \langle a_2^\dagger a_2 \rangle = i \sum_{\lambda k} g_{\lambda k} \langle \underbrace{c_{\lambda k}^\dagger a_2^\dagger a_1}_{\text{problematisch: Hierarchieproblem}} \rangle + \text{h.a.}$$

problematisch: Hierarchieproblem

$$\text{weil: } \langle c_{\lambda k} \rangle \langle a_2^\dagger a_1 \rangle \rightarrow \text{klassisch Blochgleichg.}$$

↑  
müßte dann Gleichgewichtszustand sein

↳ klass. elektromagn. Feld  $\rightarrow$  keine Quanteneffekte

1. Näherung: Feld hat unendliche FV

Idea:

Bewegungsgleichg. f.  $c_{\lambda k}^\dagger a_2^\dagger a_1$  aufschreiben und dann faktorisieren

$$\frac{d}{dt} (c_{1k} a_2^+ a_1) = \left( \frac{d}{dt} c_{1k} \right) a_2^+ a_1 + c_{1k} \left( \frac{d}{dt} a_2^+ a_1 \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\rightarrow \text{von oben}}$

nach Reduz:

$$\frac{d}{dt} \left( g_{21}^{1k} c_{1k} a_2^+ a_1 \right) = -i (\underbrace{c_{1k} - \omega_0}_{\omega_2 - \omega_1}) g_{21}^{1k} c_{1k} P_{21} \quad \text{freier Anteil}$$

$$+ i |g_{21}^{1k}|^2 a_1^+ a_2 a_2^+ a_1 + i \sum_{1'k'} g_{12}^{1k'} g_{21}^{1k} \left( \delta_{kk'} + c_{1'k'}^+ c_{1k} \right) \Delta_{21}$$

$$\left[ \text{mit } \Delta_{21} = (a_2^+ a_2 - a_1^+ a_1) \right] \quad \text{untere Zeile}$$

Erwartungswerte nehmen:

$$\langle a_1^+ a_2 a_2^+ a_1 \rangle = \langle a_1^+ (1 - a_2^+ a_2) a_1 \rangle = \langle a_1^+ a_1 \rangle$$

$\uparrow$   
 Spur über Anfangszustände  
 (Erwartungswerte)

$= f_1$   
      

$$i \sum_{1'k'} g_{12}^{1k'} g_{21}^{1k} \left( \delta_{kk'} + c_{1'k'}^+ c_{1k} \right) \Delta_{21} =$$

$$i \left| g_{12}^{kl} \right|^2 (\underbrace{f_2}_{=} - \underbrace{f_1}_{=}) + \sum_{l'k'} g_{12}^{kl} g_{21}^{l'k'} \cdot \underbrace{\langle c_{l'k'}^+ c_{lk} \Delta_{21} \rangle}$$

Faktorisierung:  $\langle c_{l'k'}^+ c_{lk} \rangle \langle \Delta_{21} \rangle$

in Mittelwerte:  $\sum_{kk'}^{l'l} u_{lk} (f_2 - f_1)$

↗  
räumlich homogen Situation

2. Näherung: Bornsche Näherung, zweite Ordnung ( $g^2$ )

$$\frac{d}{dt} g_{21}^{lk} \langle c_{lk} P_{21} \rangle = -i (\omega_{lk} - \omega_0) g_{21}^{lk} \langle c_{lk} P_{21} \rangle \quad \text{freie Bewegung}$$

$$+ i \left| g_{12}^{lk} \right|^2 \left( f_2 + [f_2 - f_1] u_{lk} \right) \quad \text{Streuung}$$

geschlossenes System in  $f_2, f_1, u_{lk}$  und  $\langle c_{lk} P_{21} \rangle$

Differentialgleichung 1. Ordnung f.  $\langle c_{lk} P_{21} \rangle$ :

$$g_{21}^{lk} \langle c_{lk} P_{21} \rangle(t) = i \left| g_{12}^{lk} \right|^2 \int_{-\infty}^t dt' e^{-i(\omega_{lk} - \omega_0)(t-t')} F(t')$$

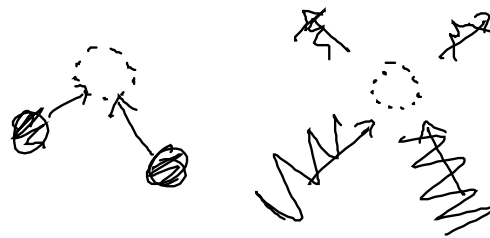
$$F(t') = f_2(t') + [f_2(t') - f_1(t')] u_{lk}(t')$$

Leitern in  $f_2$  :

$$f_2(t) = -2 \sum_{\mathbf{k}} |g_{\mathbf{k}}^{A_2}|^2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^t dt' e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0)(t-t')} F(t')$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Feldstärkeeffekt: } f_2(t) \sim f_2(t')}$

ist in QM klarheit daß Teilchen sind bei Stoß auf kurze Zeite  $t' < t$   
wie Wellen verhalten :

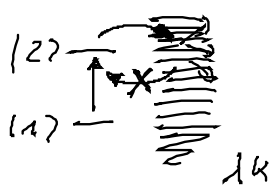


Theorien die aus QM abgeleitet werden können nach  
Zeitskala klassifiziert werden :

auf Stoßzeitskala beobachten  $\rightarrow$  QM

auf großräumigen Skala beobachten  $\rightarrow$  Kinematik, Hydrodynamik

Wann kann man Zeit großräumig machen?



Ausgg. wird abgegeben  
Umgeb. : wenn  
Umgeb. viele Freiheitsgrad  
hat, so „verdrückt“ die



ZNS Starkfeld Quark Kohärenz  $\rightarrow$  Zeitnütz.



Jedüchmisoffekt wird wichtig wenn viele Freiheitsgrade der Umgebung  $F$

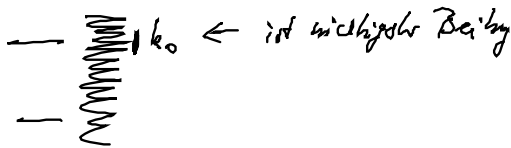
$\Leftrightarrow \hat{=} \text{mehrfache Weltalter}$

mathematisch:  $\lambda_k$ : viele Freiheitsgrade

$$\sum_{\lambda_k} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i(\omega_{\lambda_k} - \omega_0)(t-t')} F(t') \downarrow F_k(t')$$

$\sum_{\lambda_k}$  ist einfach wenn Resonanz wdh. macht:

alle  $k$  im Integral sieht man  $k \rightarrow k_0$  mit  $\omega_{k_0} = \omega_0$



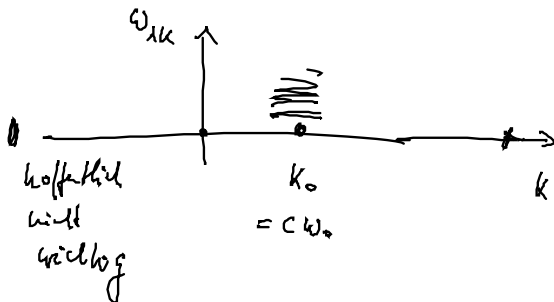
$$e^{i\omega_{\lambda_k} t} \approx e^{i\omega_0 t}$$

wird stehen geblieben (oszilliert stark)

Markoff approximation weil die  $\epsilon'$  eliminiert.

$$\sum_{\lambda_k} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\epsilon \int_0^{\infty} dk k^2 \rightarrow \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dk k_0$$

$\uparrow$  wird der unendliche Beitrag macht



$\int d\Omega \hat{=} \text{Winkel mittl. } \vec{r}_1, \vec{r}_2 \text{ bzgl. } \vec{e}_{1k} \cdot \vec{d}_{12} \text{ (Übung)}$

$$\dot{f}_2(t) = -2 \frac{V}{(2\pi)^3} \underbrace{\int d\Omega |g_{12}^{1k_0}|^2}_{\frac{8\pi |d_{12}|^2}{3}} \cdot \frac{2\pi}{c} k_0^2 \int_{-\infty}^t dt' \delta(t-t') e^{i\omega_0(t-t')} F(t')$$

mit  $\int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ik(t-t')} \rightarrow \frac{2\pi}{c} \delta(t-t') \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \theta(t-t')$

$$\begin{aligned} \dot{f}_2(t) &= -\Gamma f_2(t) - \Gamma (f_2(t) - f_1(t)) u_0(t) \\ \dot{u}_0(t) &= \Gamma f_2(t) + \Gamma (f_2(t) - f_1(t)) u_0(t) \end{aligned}$$

- Photon rate gleich. f. ZNS für Besetzungsdichte  $f_2$ ,  $1 = f_1 + f_2$  und die Photon Zahl  $u_0$  mit der Energie  $\hbar\omega_0$  d. ZNS.
- 2 gekoppelte Dgl., lösbar, wenn auch nicht ex. f. d.
- $\Gamma$  ist Rate mit der die Dg quant. stabil findet:

$$\Gamma = \left(\frac{\omega_0}{c}\right)^3 \frac{|d_{12}|^2}{\hbar \epsilon_0 3\pi} \approx \omega_0^3 |d_{12}|^2$$

(Einstein Koeffizient)

- fluktuierende Licht spontane Prozesse:  $u_0 = 0$   
stimuliert Prozesse:  $u_0 \neq 0$

- weite Prozesse: Verluste und externe Pumpen