V. Dynamische Systeme

Fragestellungen (Beispiele):

- Langzeitverhalten eines periodischen Systems (z.B. Pendel), welches kleinen Störungen unterworfen ist?
- Gibt es eine „kritische“ Stärke einer Störung, bei der sich das Verhalten des Systems grundsätzlich ändert?
- generell: Abhängigkeit von äußeren Kontrollparametern

V.1. Was ist ein dynamisches System?

Ein dynamisches System wird durch einen Satz zeitabhängiger Variablen $a_1(t), a_2(t), \dots, a_N(t)$ mit der Dynamik

$$\dot{a}_i = f_i(a_1, a_2, \dots, a_N, t, \mu) \qquad i = 1, \dots, N$$

beschrieben

t: Zeit

μ: zeitunabhängiger Kontrollparameter (externes Feld, Temperatur, ...)

f_i: Komponente eines Vektors $\underline{f}$ mit N Komponenten

N: Anzahl der Variablen

Vektor $\underline{a}$ hat die Komponenten $a_i(t)$

Kurzform: $\boxed{\underline{\dot{a}}(t) = \underline{f}(\underline{a}, t, \mu)}$

$\underline{a}(t)$: Trajektorie

$\underline{f}$: „Fluss“ des dynamischen Systems durch den Raum der Variablen

Spezialfall: „autonomes System“: $\underline{f}(\underline{a}, t, \mu) = \underline{f}(\underline{a}, \mu)$ Fluss unabhängig von der Zeit

Beispiele:

i) Hamilton'sche Dynamik

$$\underline{a}(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_f(t), p_1(t), \dots, p_f(t)) \quad : \quad N = 2f$$

f: Zahl der Freiheitsgrade

$$f_i = \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial p_i} & , \; q_i = q_1, \dots, q_f \\ -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} & , \; q_i = p_1, \dots, p_f \end{cases}$$

f_i: Komponenten des Vektors $\underline{f}$

Sei H (Hamiltonfkt.) zeitunabhängig $\Rightarrow$ autonomes System

ii) Euler'sche Gleichungen (ohne äußeres Drehmoment)

$$\dot{\omega}_1 = \frac{J_2 - J_3}{J_1}\,\omega_2\omega_3$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{J_3 - J_1}{J_2}\,\omega_3\omega_1 \qquad N = 3$$

$$\dot{\omega}_3 = \frac{J_1 - J_2}{J_3}\,\omega_1\omega_2$$

V.2. Fixpunkte und Stabilität

Wir beschränken uns auf den wichtigen Fall autonomer Systeme

Fixpunkte der Dynamik

„Punkt" $\underline{a}^\circ$ mit $\boxed{\dot{\underline{a}}\Big|_{\underline{a}^\circ} = \underline{f}(\underline{a}^\circ, \mu) = 0}$ (*)

Beachte: Gleichung sagt noch nichts darüber aus, ob die Konfiguration (Fixpunkt) $\underline{a}^\circ$ stabil oder instabil ist!

$\Rightarrow$ Untersuche das Verhalten des dynamischen Systems bei kleinen Abweichungen der Trajektorie $\underline{a}(t)$ vom Fixpunkt $\underline{a}^\circ$

$$\delta\underline{a}(t) = \underline{a}(t) - \underline{a}^\circ$$

Betrachte dazu:

$$\frac{d}{dt}\left(\delta\underline{a}(t)\right) = \frac{d}{dt}\underline{a}(t) - \frac{d}{dt}\underline{a}^\circ = \frac{d}{dt}\underline{a}(t)$$

$$= \underline{f}(\underline{a}, \mu)$$

$$\approx \underbrace{\underline{f}(\underline{a}^\circ, \mu)}_{\substack{0\ (*) \\ \text{Term nullter Ordnung}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \underline{f}}{\partial a_i}\Bigg|_{\underline{a}^\circ} \delta\underline{a}(t)}_{\text{Term erster Ordnung}} + O\left((\delta a)^2\right)$$

Nehme an, dass $\delta\underline{a}$ kleine Abweichung!

$\Rightarrow$ Taylorentwicklung um Fixpunkt

$\Rightarrow$ In linearer Näherung („lineare Stabilitätsanalyse")

$$\frac{d}{dt}\delta \underline{a}(t) = \delta \underline{\dot{a}}(t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial a_i}\bigg|_{\underline{a}^0} \delta \underline{a}(t)$$

führe ein: Matrix $\underline{\underline{A}}$

mit Komponente $(\underline{\underline{A}})_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial a_k}\bigg|_{\underline{a}^0}$

„Jacobimatrix"

$$\Rightarrow \boxed{\delta \underline{\dot{a}}(t) = \underline{\underline{A}}\, \delta \underline{a}(t)}$$

$\underline{\underline{A}}$ ist unabhängig von den $\delta \underline{a}$!

Analyse dieser Gleichung:

– lineare homogene DGL 1. Ordnung in der Zeit!

$$\boxed{\delta \underline{\dot{a}}(t) - \underline{\underline{A}}\, \delta \underline{a}(t) = 0} \quad (**)$$

Betrachte die Situation, dass $\underline{\underline{A}}$ diagonal ist (man muß also vorher diagonalisieren!!)

$\underline{\underline{A}}\,\underline{u}_i = \lambda_i \underline{u}_i$ mit $\underline{u}_i$: Eigenvektoren

λ_i: Eigenwerte

~~Nah~~ Betrachte nun eine kleine Abweichung $\delta \underline{a}(t)$ in Richtung eines Eigenvektors

also $\delta \underline{a}(t) = g_i(t)\, \underline{u}_i$ (Ansatz)

Einsetzen in (**)

$$\frac{d}{dt}\left(g_i(t)\underline{u}_i\right) - \underline{\underline{A}}\, g_i(t)\underline{u}_i = 0 \qquad \text{Benutze: } \underline{\underline{A}}\,\underline{u}_i = \lambda_i \underline{u}_i$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} g_i(t)\underline{u}_i - \lambda_i \underline{u}_i\, g_i(t) = 0$$

(d.h. auch $\frac{d}{dt} g_i(t) = \lambda_i g_i(t)$, da Eigenvektoren $\underline{u}_i$ orthogonal!)

Lösung: $\delta \underline{a}(t) = g_i(t)\underline{u}_i = \underbrace{g_i(t=0)\, e^{\lambda_i t}}_{g_i(t)} \underline{u}_i$

Allgemeine Lösung:

$$\boxed{\delta \underline{a}(t) = \sum_{i=1}^{N} g_i(t=0)\, e^{\lambda_i t}\, \underline{u}_i}$$

mit $g_i(t=0)$ aus Anfangsbedingungen

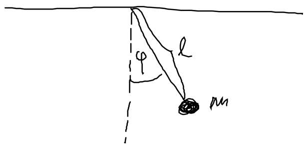
Wir werden sehen: ~~Da~~ Die Eigenwerte λ_i charakterisieren die „Stabilität" (zeitl. Verhaltens)

allein!

denn: $\underline{u}_i$ sind zeitunabhängig!

Beispiel ebenes Fadenpendel

erster Schritt: Aufstellen des dyn. Systems, betrachte zunächst Lagrange- und Hamiltonfkt.



l fest:
φ ist generalisierte Koordinate

Kinetische Energie $T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2$

potentielle Energie: $V = -mgl(\cos\varphi - 1)$

$\varphi = 0$ (Ruhelage): $V = 0$

$\varphi = \pi$ $\quad V = 2mgl$

$$L = T - V = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl(\cos\varphi - 1)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad m l^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin\varphi = 0$$

Lagrange-BWGL

Hamilton:

Variablen: $\varphi,\ p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m l^2 \dot{\varphi}$

$$\Rightarrow \underline{a}(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ p_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ m l^2 \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

$N = 2$

Hamilton-Funktion:

$$H = \dot{\varphi} p_\varphi - L = \frac{1}{2} p_\varphi \dot{\varphi} - mgl(\cos\varphi - 1)$$

$$= \frac{p_\varphi^2}{2 m l^2} - mgl(\cos\varphi - 1)$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = \dot{a}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2} = \frac{a_2}{ml^2} = f_1$$

$$\dot{p}_\varphi = \dot{a}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi = -mgl\sin a_1 = f_2$$

$$\Rightarrow \underline{\dot{a}} = \underline{f} \quad \text{mit} \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ p_\varphi \end{pmatrix}, \quad \underline{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_2}{ml^2} \\ -mgl\sin a_1 \end{pmatrix}$$

<u>Fixpunkte</u>

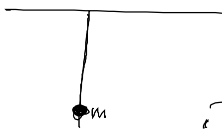
$$\underline{\dot{a}}\Big|_{\underline{a}^\circ} = f(\underline{a}^\circ) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} \dot{a}_1 = 0 \\ \dot{a}_2 = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{matrix} a_2 = 0 \\ a_1 = 0, \pi, 2\pi, \ldots \end{matrix}}$$

$a_2 = 0 \Rightarrow p_\varphi = 0 \Rightarrow$ Kinetische Energie $\frac{p_\varphi^2}{2ml^2}$ ist Null!

$a_1 \hat{=} \varphi$: potentielle Energie $-mgl(\cos\varphi - 1)$ ist minimal ($V=0$) oder maximal ($V=2mgl$)

Betrachte nun die Stabilität der Fixpunkte

a) $a_2 = 0$, $a_1 = 0$
($\varphi = 0$)



„Ruhelage“

$$\delta \underline{\dot{a}} = \underline{\underline{A}}\, \delta \underline{a}$$

$$(\underline{\underline{A}})_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial a_k}\Big|_{\underline{a}^\circ} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl & 0 \end{pmatrix} \quad \text{für den Fixpunkt } a_1 = a_2 = 0$$

<u>Eigenwerte</u>:

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}}) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + g/l \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{g}{l}} = \pm i\omega$$

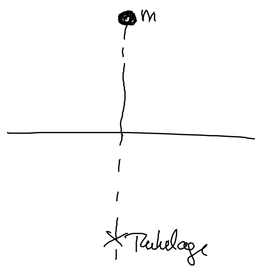
rein komplexe Eigenwerte!

$$\Rightarrow \quad \delta \underline{a}(t) = g_1 \underline{u}_1 e^{i\omega t} + g_2 \underline{u}_2 e^{-i\omega t}$$

physikalische Interpretation:

Kleine Auslenkungen aus der Ruhelage führen zu Oszillation mit Frequenz $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ und kleinen, zeitunabhängigen Amplituden (g_1, g_2). Bewegung kommt also weder zur Ruhe, noch wird sie größer im Laufe der Zeit!

Man sagt in diesem Fall: der Fixpunkt $a_1 = a_2 = 0$ ist stabil, er bildet ein „Zentrum" der Bewegung



b) Stabilität des Fixpunktes $a_2 = 0 \quad (\hat{=}\ p_\varphi = 0)$

$a_1 = \pi \quad (\hat{=}\ \varphi = \pi)$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ +mgl & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Jacobi-Matrix}$$

Eigenwerte: $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}}) = \lambda^2 - g/l \stackrel{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad \text{rein reelle Eigenwerte !!}$$

allg. Lösung: $$\delta \underline{a}(t) = \underbrace{g_1 \underline{u}_1 e^{\sqrt{\frac{g}{l}}\,t}}_{\text{divergiert für } t \to \infty\,!!} + \underbrace{g_2 \underline{u}_2 e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}\,t}}_{\text{verschwindet für } t\to\infty}$$

$\underline{u}_1$ ist eine „abstoßende" Richtung

($\underline{u}_2$ ist „anziehende" Richtung)

Da einer der Eigenwerte reell positiv ist, heißt der Fixpunkt instabil

Generell: Ist einer der Eigenwerte der Jacobi-Matrix reell positiv so heißt der Fixpunkt instabil!

Betrachte nun ein Pendel mit Reibung

BWGL: $m l^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin\varphi + 2\gamma m l^2 \dot{\varphi} = 0$ (*) mit γ Reibungskonstante ($\gamma > 0$)

(Newton)

wie vorher: $a_1 = \varphi$, $a_2 = m l^2 \dot{\varphi}$

$$\dot{a}_1 = \frac{a_2}{m l^2} = f_1$$

$$\dot{a}_2 = m l^2 \ddot{\varphi} \overset{(*)}{=} -mgl \sin\varphi - 2\gamma m l^2 \dot{\varphi}$$

$$= -mgl \sin a_1 - 2\gamma a_2 = f_2$$

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} \frac{a_2}{m l^2} \\ -mgl \sin a_1 - 2\gamma a_2 \end{pmatrix}$$

Fixpunkte: unverändert gegenüber dem reibungsfreien Fall

$$a_2 = 0, \quad a_1 = 0, \pi, 2\pi, \ldots$$

betrachte Stabilität des Fixpunktes $a_1 = a_2 = 0$ (Ruhelage)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m l^2} \\ -mgl & -2\gamma \end{pmatrix}$$

Eigenwerte im Falle „schwacher Reibung" $\gamma^2 < \omega^2$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \quad \text{mit } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\Rightarrow \delta\underline{a}(t) = e^{-\gamma t}\left(g_1 e^{i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t}\,\underline{u}_1 + g_2 e^{-i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t}\,\underline{u}_2\right)$$

Gedämpfte Schwingung!! (Realteil von $\lambda_{1,2}$ ist negativ!!)

Auslenkung $\delta\underline{a}(t)$ läuft gegen Null für $t \to \infty$!!

„Fixpunkt ist stabil"

andere Fall: $\gamma^2 > \omega^2$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$ Realteil ist immer noch negativ

$\Rightarrow$ Fixpunkt ist stabil