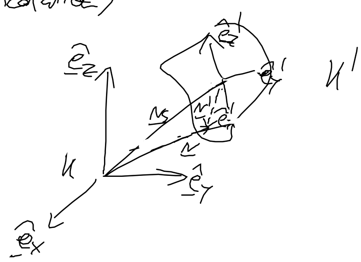
raumfestes Koordinatensystem (K) $\Longrightarrow$ körperfestes System (K')
Inertialsystem — i.A. kein Inertialsystem (Beschleunigung, Rotation)



$$\dot{\underline{r}}(t)\Big|_K = \dot{\underline{r}}_S(t)\Big|_K + \underbrace{\dot{\underline{r}}'(t)\Big|_{K'}}_{} + \underline{\omega}\times\underline{r}'$$

Null für einen echten starren Körper, in dem alle Massenpunkte $\underline{r}'$ relativ zum Ursprung von K' fixiert

$$\Longrightarrow \underbrace{\dot{\underline{r}}(t)\Big|_K}_{\underline{v}} = \underbrace{\dot{\underline{r}}_S(t)\Big|_K}_{\underline{v}_S} + \underline{\omega}\times\underline{r}'$$

$$\underline{v} = \underline{v}_S + \underline{\omega}\times\underline{r}'$$

BWGL: in K: $m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}$ (konventionelle Newton)

$$\text{in } K': \quad m\ddot{\underline{r}}'(t)\Big|_{K'} = \underline{F} - m\ddot{\underline{r}}_S\Big|_K + \underline{F}_C + \underline{F}_Z - m(\dot{\underline{\omega}}\times\underline{r}')$$

Coriolis, Zentrifugalkraft — Scheinkräfte!

(III.3. Kinetische Energie, Trägheitstensor)

$\Longrightarrow$ echter starrer Körper, Ursprung des körperfesten Systems = Schwerpunkt dieses Körpers!

diskrete Massen: $\underline{r}_S = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i$ (in K)

aber $\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i' = \ldots = 0$ in K'

analog kontinuierliche Massenverteilung: $\int d\underline{r}'\,\rho(\underline{r}')\,\underline{r}' = 0$ in K', $\quad \underline{r}_S = \frac{1}{M}\int d\underline{r}\,\rho(\underline{r})\,\underline{r}$ in K

Betrachte nun die kinetische Energie T

a) diskrete Massenverteilung

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\underline{v}_S+\underline{\omega}\times\underline{r}_i'\right)^2 \quad , \quad \underline{r}_i' : \text{Ortsvektoren der Massenpunkte bzgl. Ursprung von } K' \; (=\text{Schwerpunkt})$$

Geschw. bzgl. K

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_S^2 + \underline{v}_S\cdot\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\underline{\omega}\times\underline{r}_i'\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\underline{\omega}\times\underline{r}_i'\right)^2$$

benutze $\underline{a}\cdot(\underline{b}\times\underline{c})$
$= \underline{c}\cdot(\underline{a}\times\underline{b})$
$= (\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{c}$

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_S^2 + \cancel{(\underline{v}_S\times\underline{\omega})\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i\underline{r}_i'}_{0}} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\underline{\omega}\times\underline{r}_i'\right)^2$$

nach Voraussetzung!

$$= \frac{1}{2}\underline{v}_S^2\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i}_{M} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\underline{\omega}\times\underline{r}_i'\right)^2$$

$$\Rightarrow T=\frac{M}{2}\underline{v}_S^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\underline{\omega}\times\underline{r}_i'\right)^2$$

Umformen des 2. Terms:

$$\left(\underline{\omega}\times\underline{r}_i'\right)^2 = \omega^2|\underline{r}_i'|^2\sin^2\alpha_i$$

wobei α_i der Winkel zw. $\underline{\omega}$ und $\underline{r}_i'$ ist

$(\underline{a}\times\underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}|\sin\varphi$,  $)$

$\omega = |\underline{\omega}|$

$$= \omega^2|\underline{r}_i'|^2\left(1-\cos^2\alpha_i\right)$$

$$= \omega^2|\underline{r}_i'|^2 - \underbrace{\omega^2|\underline{r}_i'|^2\cos^2\alpha_i}_{(\underline{\omega}\cdot\underline{r}_i')^2}$$

$\underline{a}\cdot\underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}|\cos\varphi$

benutze:

$$\omega^2 = |\underline{\omega}|^2 = \underline{\omega}\cdot\underline{\omega} = \sum_{\mu=1}^{3}\omega_\mu^2$$

ω_μ ist Komponente von $\underline{\omega}$

$$(\underline{a}\cdot\underline{b})^2 = \left(\sum_{\mu=1}^{3} a_\mu b_\mu\right)^2 = \sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3} a_\mu b_\mu a_\nu b_\nu$$

$$\Rightarrow \left(\underline{\omega}\times\underline{r}_i'\right)^2 = \sum_{\mu=1}^{3}\omega_\mu^2|\underline{r}_i'|^2 - \sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3}\omega_\mu\omega_\nu(\underline{r}_i')_\mu(\underline{r}_i')_\nu$$

$$= \sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3} \omega_\mu \left[\delta_{\mu\nu} (\underline{r}_i')^2 - (\underline{r}_i')_\mu (\underline{r}_i')_\nu \right] \omega_\nu$$

Einsetzen in den Ausdruck für kinetische Energie

$$\Rightarrow \boxed{T = \underbrace{\frac{M}{2}\underline{v}_s^2}_{\substack{\text{Translationsanteil} \\ \text{(wie bei Punktmechanik)}}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3} \omega_\mu J_{\mu\nu} \omega_\nu}_{\text{Rotationsanteil}}}$$

mit dem Trägheitstensor $J_{\mu\nu} := \sum_{i=1}^{N} m_i \left(|\underline{r}_i'|^2 \delta_{\mu\nu} - (\underline{r}_i')_\mu (\underline{r}_i')_\nu \right)$

(für diskrete Massenverteilung)

$J_{\mu\nu}$ hängt ab von der spezifischen Massenverteilung (also den Vektoren $\underline{r}_i'$)

Beachte: Der Rotationsanteil von T ist quadratisch in der Winkelgeschwindigkeit ($\underline{\omega}$) (analog zur quadrat. Abhängigkeit des Translationsanteils von $\underline{v}_S$)

außerdem: Analogie Masse —— Trägheitstensor

b) Kontinuierliche Massenverteilung

$$T = \frac{1}{2}\int d\underline{r}' \rho(\underline{r}') \underline{v}^2 = \frac{1}{2}\int d\underline{r}' \rho(\underline{r}') \left(\underline{v}_s + \underline{\omega} \times \underline{r}' \right)^2$$

Geschwindigkeit an der Stelle $\underline{r}'$ relativ zu K!

Vorgehensweise analog zum diskreten Fall!

$$= \frac{1}{2}\underline{v}_s^2 \int d\underline{r}\, \rho(\underline{r}') + \cancel{(\underline{v}_s \times \underline{\omega}) \cdot \int d\underline{r}' \rho(\underline{r}')\underline{r}'} + \frac{1}{2}\int d\underline{r}' \rho(\underline{r}') \underbrace{(\underline{\omega} \times \underline{r}')^2}_{\text{behandeln wie im diskreten Fall}}$$

Null, da Schwerpunkt im Ursprung von K' (s. Beginn des Kapitels) definiere $$J_{\mu\nu} := \int d\underline{r}'\,\rho(\underline{r}')\left[(\underline{r}')^2\delta_{\mu\nu} - (\underline{r}')_\mu(\underline{r}')_\nu\right]$$

bestimmt durch die spezifische Massenverteilung!

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{M}{2}\underline{v}_S^2 + \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3}\omega_\mu J_{\mu\nu}\omega_\nu}$$

genau wie im diskreten Fall

$\Rightarrow$ Kinetische Energie T hat allgemein die Zerlegung

$$T = T_{trans} + T_{rot}$$

mit $$T_{trans} = \frac{M}{2}\underline{v}_S^2$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3}\omega_\mu J_{\mu\nu}\omega_\nu = \frac{1}{2}\underline{\omega}\,\underline{\underline{J}}\,\underline{\omega}$$

wobei: $\underline{\underline{J}}$ ist eine Matrix mit Komponenten $J_{\mu\nu}$

$$(\underline{\underline{J}}\,\underline{\omega})_\mu = \sum_{\nu=1}^{3} J_{\mu\nu}\omega_\nu$$

III.4. Eigenschaften des Trägheitstensors

i) $\underline{\underline{J}}$ ist ein Tensor 2. Stufe

(Skalare: Tensoren 0. Stufe
Vektoren: " 1. Stufe)

Was heißt das für das Transformationsverhalten unter Drehung?

Hintergrund.
für die Komponenten eines Tensors 1. Stufe (Vektor) gilt bei Drehungen:

$$(\underline{r}')_\mu \longrightarrow (\underline{r}'')_\mu = \sum_{\nu=1}^{3} R_{\mu\nu}(\underline{r}')_\nu$$

$(\mu = 1, 2, 3)$

mit $R_{\mu\nu}$: Elemente einer Drehmatrix $\underline{\underline{R}}$

mit $\underline{\underline{R}} \in SO(3)$

„spezielle orthogonale Gruppe in drei reellen Dimensionen"

Eigenschaften:

$$\det \underline{\underline{R}} = 1$$

$$\underline{\underline{R}}^{-1} = \underline{\underline{R}}^T \Rightarrow \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{1}}$$

<u>Man fordert:</u>

Tensoren k-ter Stufe transformieren sich für jeden Index wie Vektoren!

also: für Tensor 2. Stufe:

$$\underbrace{J_{\mu\nu}}_{\substack{\text{Element}\\ \text{von } \underline{\underline{J}}}} \longrightarrow \underbrace{J'_{\mu\nu}}_{\substack{\text{Element}\\ \text{von } \underline{\underline{J}}'}} = \sum_{\gamma=1}^{3} \sum_{\delta=1}^{3} R_{\mu\gamma} R_{\nu\delta} J_{\gamma\delta}$$

Die Drehmatrix $\underline{\underline{R}}$ taucht also zweimal auf!

Beweis dieser Transformationsvorschrift für $\underline{\underline{J}}$ (für diskrete Massenverteilung)

$$J_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left((\underline{r}_i')^2 \, \delta_{\mu\nu} - (\underline{r}_i')_\mu (\underline{r}_i')_\nu \right)$$

$$|\underline{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\left(\sum_{\tau=1}^{3} (\underline{r}_i')_\tau^2 \right) \delta_{\mu\nu} - (\underline{r}_i')_\mu (\underline{r}_i')_\nu \right)$$

Drehe nun die Vektoren $\underline{r}_i'$

$$\Rightarrow (\underline{r}_i'')_\tau = \sum_\delta R_{\tau\delta} (\underline{r}_i')_\delta$$

betrachte

$$\sum_{\tau=1}^{3} (\underline{r}_i'')_\tau^2 = \sum_\tau \sum_\delta \sum_\gamma R_{\tau\delta} R_{\tau\gamma} (\underline{r}_i')_\delta (\underline{r}_i')_\gamma$$

$$= \sum_\delta \sum_\gamma (\underline{r}_i')_\delta \underbrace{\sum_\tau R_{\tau\delta} R_{\tau\gamma}}_{\underbrace{\sum_\tau (\underline{\underline{R}}^T)_{\delta\tau} R_{\tau\gamma}}_{\underbrace{(\underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}})_{\delta\gamma}}_{(\underline{\underline{1}})_{\delta\gamma} = \delta_{\delta\gamma}}}} (\underline{r}_i')_\gamma$$

$$= \sum_\delta \sum_\gamma (\underline{r}_i')_\delta \, \delta_{\delta\gamma} (\underline{r}_i')_\gamma = \sum_\delta (\underline{r}_i')_\delta^2 = (\underline{r}_i')^2$$

d.h. das Skalarprodukt ist invariant unter Drehung!

betrachte nun das Kronecker-Delta $\delta_{\mu\nu}$ in $J_{\mu\nu}$

$$\delta'_{\mu\nu} = \sum_\gamma \sum_\delta R_{\mu\gamma} R_{\nu\delta} \delta_{\gamma\delta}$$

$$= \sum_\gamma R_{\mu\gamma} R_{\nu\gamma} = \sum_\gamma R_{\mu\gamma} \left(\underline{\underline{R}}^T\right)_{\gamma\nu}$$

$$= \left(\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{R}}^T\right)_{\mu\nu} = \left(\underline{\underline{1}}\right)_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$$

Also folgt:

$$J'_{\mu\nu} = \sum_\gamma \sum_\delta R_{\mu\gamma} R_{\nu\delta} J_{\gamma\delta} \qquad \text{setze Def. von } J_{\mu\nu} \text{ ein}$$

$$= \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_\gamma \sum_\delta R_{\mu\gamma} R_{\nu\delta} \left((\underline{r}_i')^2 \delta_{\gamma\delta} - (\underline{r}_i')_\gamma (\underline{r}_i')_\delta \right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^N m_i \left((\underline{r}_i'')^2 \delta_{\mu\nu} - \underbrace{\sum_\gamma R_{\mu\gamma} (\underline{r}_i')_\gamma}_{(\underline{r}_i'')_\mu} \underbrace{\sum_\delta R_{\nu\delta} (\underline{r}_i')_\delta}_{(\underline{r}_i'')_\nu} \right)$$

letzte Zeile entspricht der Def. von $\underline{\underline{J}}$ in den gedrehten Vektoren! $(\underline{r}_i'')$

Wir haben also gesehen, dass $\underline{\underline{J}}$ wirklich ein richtiger Tensor 2. Stufe ist mit dem korrekten Transformationsverhalten unter Drehung!

Weitere Eigenschaften des Trägheitstensors:

ii) Der Trägheitstensor enthält immer 2 Anteile

(z.B. kontinuierl.) $$J_{\mu\nu} = \int d\underline{r}'\, \rho(\underline{r}') (\underline{r}')^2 \delta_{\mu\nu}$$ } rotationsinvarianter Anteil!

$$- \int d\underline{r}'\, \rho(\underline{r}') (\underline{r}')_\mu (\underline{r}')_\nu$$ } nicht drehinvariant, hängt also ab von der Wahl von K'

iii) $\underline{\underline{J}}$ ist linear in den m_i bzw. in $\rho(\underline{r}')$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{J}}$ ist additiv beim Zusammenfügen zweier Körper

(„extensive" Größe)

iv) $\underline{\underline{J}}$ wird dargestellt durch eine reelle, symmetrische Matrix

(z.B. Kontinuum.) $\quad \underline{\underline{J}} = \int d\underline{r}\, \rho(\underline{r}') \begin{pmatrix} y'^2 + z'^2 & -x'y' & -x'z' \\ -y'x' & x'^2+z'^2 & -y'z' \\ -z'x' & -z'y' & x'^2+y'^2 \end{pmatrix}$

$\underline{r}'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$

v) Folgerung aus iv):

$\underline{\underline{J}}$ ist diagonalisierbar durch orthogonale Transformation $\underline{\underline{R}} \in SO(3)$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{J}}$ lässt sich überführen in

$$\underline{\underline{J}}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{R}}^T = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$$

mit J_1, J_2, J_3 Eigenwerte von $\underline{\underline{J}}$

Spalten von $\underline{\underline{R}}$: Eigenvektoren von $\underline{\underline{J}}$