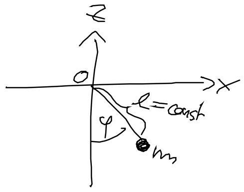
Anwendungsbeispiel Lagrange II

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \qquad \text{bzw.} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad , \; k = 1, \dots, f$$

konservatives System
$L = T - V$

Beispiel Fadenpendel in zwei Dimensionen



$$f = 1 \qquad \left((x(t))^2 + (z(t))^2 = l^2 \right)$$

$$x(t) = l \sin \varphi(t) \; , \quad z(t) = - l \cos \varphi(t) \qquad \text{Transformationsgleichungen}$$

generalisierte Koordinate

Kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot z^2) = \frac{m}{2}\left(l^2 \cos^2\varphi \, \dot\varphi^2 + l^2 \sin^2\varphi \, \dot\varphi^2 \right)$$
$$= \frac{m}{2} l^2 \dot\varphi^2 \big(\underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{1}\big)$$
$$= \frac{m}{2} l^2 \dot\varphi^2 = T(\dot\varphi)$$

T ausgedrückt durch generalisierte Geschwindigkeit $\dot\varphi$

potentielle Energie:

$$V(z) = mgz$$
$$= -mgl \cos\varphi(t) = V(\varphi)$$

(V ausgedrückt durch generalisierte Koordinate)

$$\Rightarrow L = L(\varphi, \dot\varphi)$$
$$= T - V = \frac{m}{2} l^2 \dot\varphi^2 + mgl \cos\varphi$$

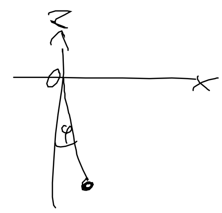
Lagrangegleichung II. Art

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(m l^2 \dot\varphi \right) + mgl \sin\varphi = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m l^2 \ddot\varphi + mgl \sin\varphi = 0} \quad (*)$$

Lösung wird besonders einfach für kleine Pendelauslenkungen um die Gleichgewichtslage ($\varphi = 0$), also kleine φ



dann $\sin\varphi \approx \varphi$ (erster nichtverschwindender Term in der Taylorentwicklung)

(*) $\Longrightarrow$ $\boxed{m l^2 \ddot{\varphi} + m g l \varphi = 0}$ lineare DGL zweiter Ordnung in t

Lösung: harmonische Schwingung

Ansatz: $\varphi(t) \sim e^{i\omega_0 t}$ mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

Weiteres Beispiel:

Gekoppelte Schwingungen (Phononen in Festkörpern)
Gitterschwingungen

$\Longrightarrow$ Übungszettel

II.8. Spezialfall eines Systems ohne Zwangsbedingungen

betrachte konservatives N-Teilchensystem ohne irgendwelche Zwangsbedingungen $f = 3N$

generalisierte Koordinaten: benutze einfach kartesische Koordinaten
$\underline{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ $i = 1, \dots, N$

Lagrangefunktion

$$L = T - V = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\underline{r}}_i^2 - V(\{\underline{r}_N\})$$

mit $\{\underline{r}_N\} = \underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N$

Lagrange-Gl.

Ableitungen nach Komponente α_i mit $\alpha_i = x_i, y_i, z_i$
bzw $\dot{\alpha}_i = \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_i} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{m_j}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}_i}\left(\dot{x}_j^2+\dot{y}_j^2+\dot{z}_j^2\right)\right)}_{\frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}_i}T} - \frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(-V\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N} m_j \dot{\alpha}_j \delta_{ij} - \left(\underline{F}_i\right)_\alpha = 0$$

wobei

$$\underline{F}_i = -\nabla_i V$$

$$\left(\underline{F}_i\right)_\alpha = -\nabla_{i,\alpha} V = -\frac{\partial}{\partial \alpha_i} V$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} m_i \dot{\alpha}_i = \left(\underline{F}_i\right)_\alpha$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m_i \ddot{\alpha}_i = \left(\underline{F}_i\right)_\alpha}$$

Wir haben also gezeigt:
In Abwesenheit von Zwangsbed. reduziert sich die Lagrange-Gl. auf die Newton'schen BWGL

— zeigt die Konsistenz der Theorie!

II. 9. Das Hamilton'sche Extremalprinzip (Variationsprinzip)

Motivation:

Bisherige Behandlung von Systemen mit (holonomen) Zwangsbedingungen

d'Alembertsches Prinzip $\rightarrow$ Lagrange-Gl. 2. Art

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\left(m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{F}_i\right)\cdot \overset{\text{virtuelle Verrück.}}{\delta \underline{r}_i} = 0 \right.$$

Die gesamte virtuelle Arbeit ist Null

Interpretation:
Das d'Alembertsche Prinzip ist ein „Differentialprinzip" in dem Sinne, dass der momentane Zustand des Systems mit ~~den~~ kleinen, virtuellen Verrückungen aus diesem Zustand verglichen wird

Die erhaltene Bewegung ist dann gegen kleine Verrückungen "stabil"

$\Rightarrow$ Zustand ist Extremalzustand

(Beispiel: „Rütteln" an einem starren Körper aus mehreren Massenpunkten mit festen Abständen)

Zeige nun

Die Lagrange-Gl. lassen sich alternativ auch aus einem Integralprinzip herleiten, nämlich dem Hamilton'schen Variationsprinzip

Vorteile gegenüber der "historischen" Herleitung über d'Alembert:

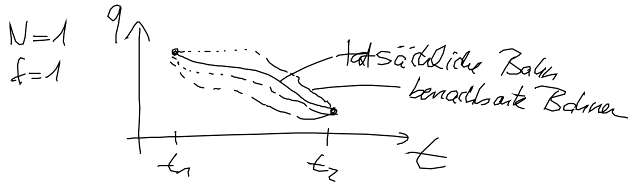
- sehr elegante Formulierung
- Variationsprinzipien sind wichtig auch in vielen anderen Gebieten der Theoret. Physik

Grundidee des Hamilton'schen Prinzips

Vergleiche die Trajektorien (Bahnen) aller Teilchen, $\{q_k(t)\}$, mit kleinen Abweichungen von diesen Bahnen

Die tatsächlich angenommene Bahn macht eine Integralgröße, die sogenannte Wirkung, extremal

$\Rightarrow$ Lagrange-Gl. II. Art



Mathematische Grundlage: Variationsrechnung

Einschub: Elemente der Variationsrechnung

Betrachte zunächst eindimensionales Problem

Sei $\underbrace{I[y,y']}_{} := \int_{x_1}^{x_2} dx\, f(x, y(x), y'(x))$ mit $y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}$

x_1, x_2 Randpunkte

I ist ein „Funktional" der Funktion $y(x)$

Gesucht:
die Funktion $y(x)$, die an den Randpunkten vorgegebene Werte $y_1 = y(x_1)$ und $y_2 = y(x_2)$ annimmt und für die das Funktional $I[y,y']$ ein <u>Extremum</u> annimmt

also $\delta I \overset{!}{=} 0$

<u>Durchführung der Variation:</u>

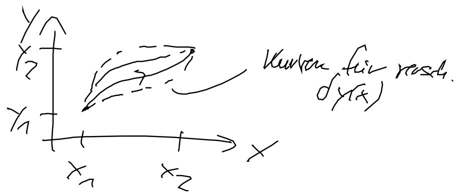
Führe dazu zunächst Vergleichskurven der Form $y_\alpha(x) = y(x) + \underbrace{\alpha\, \eta(x)}_{\delta y(x)}$ ein

gesuchte Funktion

Parameter

$\delta y(x)$ Verschiebung der Bahn (Variation)

mit $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$



<u>Variation</u>:

$$\delta I = I[y_\alpha, y_\alpha'] - I[y, y']$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left(f(x, y_\alpha, y_\alpha') - f(x, y, y') \right)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y_\alpha} \frac{dy_\alpha}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial y_\alpha'} \frac{dy_\alpha'}{d\alpha} \right)$$

α klein

Variationen sollen klein sein!

mache Taylorentwicklung von $f(x, y_\alpha, y_\alpha')$ um $\alpha = 0$

Umschreiben des 2. Terms:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \, \frac{\partial f}{\partial y_\alpha'} \frac{dy_\alpha'}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx \, \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx}\left(\frac{dy_\alpha}{d\alpha}\right)$$

$f(x, y_\alpha, y_\alpha') \approx f(x,y,y') + \left(\frac{\partial f}{\partial y_\alpha}\frac{\partial y_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y_\alpha'}\frac{\partial y_\alpha'}{\partial \alpha}\right)\Big|_{\alpha=0} \alpha$

Der Wert von α ist am Ende egal, da wir $\delta I = 0$ setzen!!

$$= \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial y_\alpha'} \cdot \frac{dy_\alpha}{d\alpha}\right]_{x_1}^{x_2}} - \int_{x_1}^{x_2} dx \, \frac{dy_\alpha}{d\alpha} \cdot \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'}$$

partiell integrieren

Null, denn $\frac{dy_\alpha}{d\alpha} = \eta(x)$ verschwindet an den Randpunkten x_1 und x_2!

$$= -\int_{x_1}^{x_2} dx \, \frac{dy_\alpha}{d\alpha} \cdot \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'}$$

Fasse zusammen:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} dx \, \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{d\alpha} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} \frac{dy}{d\alpha}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'}\right) \frac{dy}{d\alpha} \qquad (*)$$

Zur Erinnerung:

Gesucht ist diejenige Funktion $y(x)$, für die I <u>extremal</u> ist

d.h. $\boxed{\delta I = 0}$ für <u>beliebige</u> Variation $\delta y(x)$ mit festen Randpunkten

In unserem Fall: $\delta y(x) = \alpha \, \eta(x)$

$$= \frac{dy}{d\alpha} \quad \text{mit } \alpha = 1$$

$\Rightarrow$ Integrand in (*) muß für beliebige Variationen, d.h. für beliebige $\frac{dy}{d\alpha} = \eta(x)$ verschwinden!

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0}$$

Euler'sche Gleichung
(oder "Euler'sche Differentialgleichung der Variationsrechnung")

Bemerkung:

Anstatt den Hilfsparameter α einzuführen, kann man die Euler'sche Gleichung auch schneller so herleiten:

$$\delta I = \delta \underbrace{\left(\int_{x_1}^{x_2} dx\, f(x,y,y')\right)}_{I[y,y']}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left(f(x, y+\delta y, y'+\delta y') - f(x,y,y') \right)$$

Annahme: δy und damit $\delta y'$ klein

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \underbrace{\delta y'}_{\frac{d}{dx}\delta y} \right)$$

partielle Integration

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} \right)\delta y \overset{!}{=} 0 \quad \text{für alle } \delta y$$

$\Rightarrow$ Euler'sche Gleichung

II.10 Herleitung der Lagrange-Gl. aus dem Hamilton'schen Prinzip

Betrachte nun System mit holonomen Zwangsbedingungen und konservativen Kräften

$\Rightarrow$ Es existiert eine Lagrangefunktion

$$L = L(\{q_k\}, \{\dot q_k\}, t) = T - V \quad , k = 1, \dots, f$$

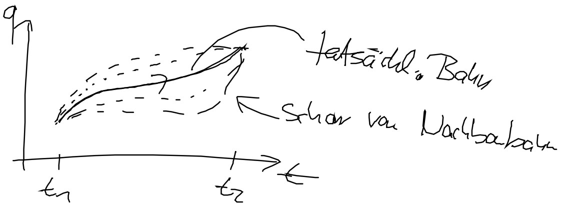
Definiere nun das sogenannte <u>Wirkungsintegral</u>

$$S := \int_{t_1}^{t_2} dt \; L(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, t)$$

<u>Hamilton'sches Prinzip:</u>
Die physikalische Bahnkurven $\{q_k(t)\}$ (d.h. die Lösung der BWGL zu gegebenen Randwerten) zeichnen sich dadurch aus, dass

$$\boxed{\delta S = 0}$$ für beliebige Variationen der Bahnkurven $\delta q_k(t)$

normal
$N=1$
$f=1$



Wir zeigen nun:
Ausführung und Anwendung des Hamilton'sche Prinzips führt auf die bekannten Lagrange-Gl. zweiter Art!

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \Big(L(q_1+\delta q_1, q_2+\delta q_2, \dots q_f+\delta q_f, \dot{q}_1+\delta\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f+\delta\dot{q}_f, t) - L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots \dot{q}_f, t) \Big)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Variationen} \\ \text{klein!}}}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \underbrace{\delta \dot{q}_k(t)}_{\frac{d}{dt}\delta q_k(t)} \right)$$

Nun partiell integrieren $\Rightarrow$ Lagrange II. Art. Details nächste VL!