$\{q_\nu\}, \{p_\nu\} \longrightarrow \{Q_\nu\}, \{P_\nu\}$, $\nu = 1, \dots, f$

Kanon. Transformation : Hamilton-Gl. bleiben forminvariant

es gibt vier "Erzeugende" , z.B. $M_1(\{q_\nu\}, \{Q_\nu\})$

$$p_\nu = \frac{\partial M_1}{\partial q_\nu}, \quad P_\nu = -\frac{\partial M_1}{\partial Q_\nu}$$

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial M_1}{\partial t}$$

Beispiele

(1) $M_1 = -\sum_{\nu=1}^{f} q_\nu Q_\nu \Longrightarrow p_\nu = -Q_\nu \ , \ P_\nu = q_\nu$

Vertauschung von Orten (Koordinaten) und Impulsen !

reflektiert, dass Koordinaten und zugehörige Impulse in dem Hamiltonformalismus auf derselben Stufe stehen !

(2) $M_2(\{q_\nu\}, \{P_\nu\}) = \sum_{\nu=1}^{f} q_\nu P_\nu$

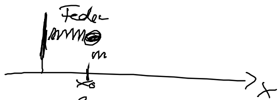
benutze $p_\nu = \frac{\partial M_2}{\partial q_\nu} = P_\nu$ $\qquad Q_\nu = \frac{\partial M_2}{\partial P_\nu} = q_\nu$

„Identische Transformation" , dasselbe gilt auch $M_3(\{p_\nu\}, \{Q_\nu\}) = -\sum_{\nu=1}^{f} p_\nu Q_\nu$

(3) Harmonischer Oszillator in 1 Dimension

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2$$

z.B. Teilchen an Feder



$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\qquad q = x - x_0$

k : Federkonstante $\qquad$ Auslenkung vom Gleichgewicht

Wähle $M_1(q, Q) = \frac{m}{2}\omega q^2 \cot Q$

$$\Rightarrow p = \frac{\partial M_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$$

$$P = -\frac{\partial M_1}{\partial Q} = \frac{m}{2}\omega q^2 \frac{1}{\sin^2 Q}$$

Ableitung

$\left(\text{da } \left(\frac{1}{\cot x}\right)' = \frac{1}{\sin^2 x} \right)$

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = q(Q,P)$$

und $p = m\omega q \cot Q$ $\quad$ $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$$= m\omega \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \frac{\cos Q}{\sin Q}$$

$$= \sqrt{m\omega 2P} \cos Q$$

$$= p(Q,P)$$

transformierte Hamiltonfunktion

$$\widetilde{H} = H + \underbrace{\frac{\partial M_1}{\partial t}}_{\text{Null}} = \frac{(p(Q,P))^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 \left(q(Q,P)\right)^2$$

$$= \frac{\cancel{2m}\omega P \cos^2 Q}{\cancel{2m}} + \frac{\cancel{m}}{\cancel{2}}\omega^2 \frac{\cancel{2}P}{\cancel{m\omega}} \sin^2 Q$$

$$= \omega P \left(\underbrace{\cos^2 Q + \sin^2 Q}_{1}\right) = \omega P$$

Die neue Hamiltonfunktion reduziert sich also auf eine sehr einfache Form!

$$\widetilde{H} = \omega P \quad (*)$$

und Q ist zyklische Koordinate! $\left(\text{denn } \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial Q} = 0\right)$

Hamiltongl.

$$\Rightarrow \dot{P} = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial Q} = 0 \quad \Rightarrow P \text{ ist Erhaltungsgröße}$$

$$\Rightarrow P = \alpha = \text{const}$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial P} \overset{(*)}{=} \omega = \text{const} \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

$$\Rightarrow Q(t) = \omega t + \beta \quad (\beta = \text{const})$$

$\Rightarrow$ Für die ursprüngl. Koordinate q folgt.

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = q(Q,P) = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega}} \sin(\omega t + \beta)$$

entsprechend

$$p = \sqrt{2m\omega P}\,\cos Q = \sqrt{2\alpha m\omega}\,\cos(\omega t + \beta)$$

$\alpha, \beta = \text{const}$

harmonische Schwingung!

II.15 Zur Struktur des Phasenraums

Wir haben gesehen:

die $\{q_i\}$ und $\{p_i\}$ sind im Hamilton-Formalismus nicht voreinander ausgezeichnet (durch kanon. Transformation lassen sie sich z.B. ineinander transformieren!)

Verdeutliche diese Symmetrie nun durch Einführung einer neuen Notation

Betrachte zunächst ein System mit $f=1$

$\Rightarrow$ Hamilton-Variable: q, p $\Rightarrow$ der Phasenraum, der durch q und p aufgespannt wird, hat die Dimension $2f = 2$

Führe folgende Größen ein:

$$\underline{x} := \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, \quad \underline{H}_x := \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \underline{\underline{J}} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{x}$: Vektor im 2-dim. Phasenraum

$\underline{H}_x$: Ableitungsvektor von H nach den Komponenten von $\underline{x}$

$\underline{\underline{J}}$: Matrix

Damit lassen sich die kanonische Gleichungen

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

umschreiben in : $\boxed{\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{J}}\, \underline{H}_x}$ kompakte Notation!

Einige Eigenschaften der Matrix $\underline{\underline{J}}$:

$$\underbrace{\underline{\underline{J}}^{-1}}_{\text{Inverse}} = \frac{1}{\underbrace{\det \underline{\underline{J}}}_{1}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{J}}^T$$

transponierte Matrix (Spiegelung an der Diagonale)

für die Inverse benutze $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(\dots)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

also: $\underline{\underline{J}}^{-1} = \underline{\underline{J}}^T = -\underline{\underline{J}}$

Folgerungen:

- aus $\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{J}}\, \underline{H}_x$ ergibt sich $\underline{\underline{J}}^{-1} \underline{\dot{x}} = -\underline{\underline{J}}\, \underline{\dot{x}} = \underline{H}_x$
- und $\underline{\underline{J}}^2 = \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\underline{J}} = \underline{\underline{J}} \cdot (-\underline{\underline{J}}^{-1}) = -\underline{\underline{J}} \cdot \underline{\underline{J}}^{-1} = -\underline{\underline{1}}$ Einheitsmatrix

Verallgemeinerung auf viele Freiheitsgrade

$$\underline{x} := \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \\ p_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix}, \quad \underline{H}_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial q_f} \\ \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_f} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{J}} = \left(\begin{array}{c|c} \underline{\underline{0}}_{f\times f} & \underline{\underline{1}}_{f\times f} \\ \hline -\underline{\underline{1}}_{f\times f} & \underline{\underline{0}}_{f\times f} \end{array}\right).$$

2f-dimensionale Vektor

$f \times f$ Einheitsmatrix

Damit lassen sich die Bewegungsgl.

$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$, $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$ schreiben als $\boxed{\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{J}}\, \underline{H}_x}$

Ziel nun:

Kanonische Transformation in kompakter Notation

Erinnerung:
Es gibt vier verschiedene Erzeugende

a) $M_1(\{q_k\},\{Q_k\},t)$

$$\Rightarrow p_m = \frac{\partial M_1}{\partial q_m} = p_m(\{q_k\},\{Q_k\},t) \quad ①$$

$$P_m = -\frac{\partial M_1}{\partial Q_m} = P_m(\{q_k\},\{Q_k\},t) \quad ②$$

Damit ① nach den $\{Q_k\}$ auflösbar ist, muß gelten

$$\frac{\partial p_m}{\partial Q_k} \overset{①}{=} \frac{\partial^2 M_1}{\partial Q_k \partial q_m} \neq 0 \qquad \forall k,m$$

Wegen ② impliziert das, dass $\boxed{\frac{\partial p_m}{\partial Q_k} = -\frac{\partial P_k}{\partial q_m}}$ $(\neq 0)$

(*a)

b) analog für $M_2(\{q_k\},\{P_k\},t)$

$$p_m = \frac{\partial M_2}{\partial q_m}, \quad Q_m = \frac{\partial M_2}{\partial P_m}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial p_m}{\partial P_k} = \frac{\partial^2 M_2}{\partial P_k \partial q_m} = \frac{\partial Q_k}{\partial q_m}} \qquad (\neq 0)$$

(*b)

c) für $M_3(\{p_k\},\{Q_k\},t)$

aus $q_m = -\frac{\partial M_3}{\partial p_m}$, $P_m = -\frac{\partial M_3}{\partial Q_m}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial q_m}{\partial Q_k} = \frac{\partial P_k}{\partial p_m}} \quad (*c)$$

d) für $M_4(\{p_n\},\{P_n\},t)$

aus $q_m = -\frac{\partial M_4}{\partial p_m}$, $Q_m = \frac{\partial M_4}{\partial P_m}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial q_m}{\partial P_n} = -\frac{\partial Q_n}{\partial p_m}} \qquad (*d)$$

Benutze nun wieder die kompakte Vektornotation

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \\ p_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix} , \quad \underline{y} := \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_f \\ P_1 \\ \vdots \\ P_f \end{pmatrix}$$

Vektor der transformiert Koordinat / Impulse

Damit lassen die Ableitung in $(*a)$ -- $(*d)$ schreiben als

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\beta} =: \left(\underline{\underline{M}}\right)_{\alpha\beta} \qquad \text{mit } \alpha,\beta = 1\ldots,f$$

Dabei hat die Matrix $\underline{\underline{M}}$ folgende Struktur

$$\underline{\underline{M}} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \hline \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{array}\right) \qquad 2f \times 2f \text{ Matrix}$$

zerfällt in vier Blockmatrizen ($f \times f$)

wobei z.B. $\left(\frac{\partial q}{\partial Q}\right)_{ij} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}$ $\quad i = 1,\ldots,f$; $j = 1,\ldots,f$

entsprechend:

$$\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta} =: \left(\underline{\underline{M}}^{-1}\right)_{\alpha\beta}$$

Dies folgt aus:

$$\sum_{\gamma=1}^{2f} \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\gamma} \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\beta} = \delta_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^{2f} (\underline{\underline{M}})_{\alpha\gamma} (\underline{\underline{M}}^{-1})_{\gamma\beta}$$

$$\text{also: } (\underline{\underline{M}}^{-1})_{\gamma\beta} = \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\beta}$$

Mit diesen Definitionen lassen sich (*a) – (*d)

wie folgt zusammenfassen

$$\boxed{(\underline{\underline{M}})_{\alpha\beta} = \sum_{\mu=1}^{2f} \sum_{\nu=1}^{2f} (\underline{\underline{J}})_{\alpha\mu} (\underline{\underline{J}})_{\beta\nu} (\underline{\underline{M}}^{-1})_{\nu\mu}} \quad (*)$$

Um das (*) zu zeigen, schreiben wir die Gl. zunächst in Matrixform

$$\sum_{\nu=1}^{2f} (\underline{\underline{J}})_{\beta\nu} (\underline{\underline{M}}^{-1})_{\nu\mu} = (\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{M}}^{-1})_{\beta\mu}$$

$$= \left((\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{M}}^{-1})^T\right)_{\mu\beta}$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} (\underline{\underline{M}})_{\alpha\beta} = \sum_{\mu=1}^{2f} J_{\alpha\mu} \left((\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{M}}^{-1})^T\right)_{\mu\beta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}}\,(\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{M}}^{-1})^T} \quad (**)$$

Um zu zeigen, dass das stimmt, rechne wir die rechte Seite aus

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} \\ -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{J}}} \left[\underbrace{\begin{pmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} \\ -\underline{\underline{1}} & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{J}}} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \hline \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{array}\right)}_{\underline{\underline{M}}^{-1}} \right]^T$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} \\ -\underline{\underline{1}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \\ \hline -\frac{\partial Q}{\partial q} & -\frac{\partial Q}{\partial p} \end{array}\right)^T}_{\left(\begin{array}{c|c} \left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^T & -\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^T \\ \hline \left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^T & -\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^T \end{array}\right)} = \left(\begin{array}{c|c} \left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^T & -\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^T \\ \hline -\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^T & \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^T \end{array}\right)$$

Linke Seite von $(**)$

$$\underline{\underline{M}} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \hline \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{array}\right) \overset{(*a)-(*d)}{=} \left(\begin{array}{c|c} \left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^T & -\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^T \\ \hline -\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^T & \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^T \end{array}\right)$$

entspricht offensichtlich der rechten Seite von $(**)$

Formuliere nun $(**)$ noch etwas um

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}} \left(\underline{\underline{J}} \cdot \underline{\underline{M}}^{-1}\right)^T \quad \Big| \cdot \underline{\underline{J}} \text{ von links}$$

$$\boxed{(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})^T = \underline{\underline{B}}^T \cdot \underline{\underline{A}}^T}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\underline{M}} = \underbrace{\underline{\underline{J}}^2}_{-1} \left(\underline{\underline{J}} \cdot \underline{\underline{M}}^{-1}\right)^T = -\left(\underline{\underline{J}} \cdot \underline{\underline{M}}^{-1}\right)^T$$

$$= -\left(\underline{\underline{M}}^{-1}\right)^T \underbrace{\underline{\underline{J}}^T}_{\underline{\underline{J}}^{-1} = -\underline{\underline{J}}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\underline{M}} = -\left(\underline{\underline{M}}^{-1}\right)^T \left(-\underline{\underline{J}}\right) \quad \Big| \text{ multipliziere von links mit } \underline{\underline{M}}^T$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{J}} \, \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}}^T \left(\underline{\underline{M}}^{-1}\right)^T \underline{\underline{J}}$$

$$= \big(\underbrace{\underline{\underline{M}}^{-1} \cdot \underline{\underline{M}}}_{\underline{\underline{1}}}\big)^T \cdot \underline{\underline{J}} = \underline{\underline{J}}$$

$$(\underline{\underline{M}})_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\beta}$$

Ergebnis $$\boxed{\underline{\underline{M}}^T \, \underline{\underline{J}} \, \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}}}$$

mit $\underline{\underline{M}}$ ist die Matrix der Ableitungen "alter" nach "neuer" Variable

$\Longleftrightarrow$ zweite Matrix Ableitungen der Erzeugenden der kanon. Transformation!

(siehe (*a) – (*d))

Bedeutung:

Die Matrix $\underline{\underline{J}}$ stellt eine „Metrik" im 2f-dimensionalen Phasenraum dar, welche invariant unter kanonischen Transformationen !!

$\underline{\underline{J}}$ als metrischer Tensor ("Metrik")

$\Rightarrow$ Definition eines Skalarprodukts $\rightarrow$ maye