Kanonische Transformation

Motivation:

zykl. Koordinate: Lagrange-Formalismus: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$

$$\Rightarrow p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \text{const} \Leftrightarrow \dot{p}_k = 0$$

Hamilton-Formalismus

$$\dot{p}_k = 0 \Leftrightarrow -\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0$$

, q_k ist auch hier zyklisch

und $p_k = \text{const} = \alpha_k$

und ist damit keine echte Koordinate mehr!!

Beispiel: Teilchen im Zentralpotential (ebene Bewegung)

generalisierte Koordinaten r, φ (Polarkoordinaten)

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)}_{\text{kinetische Energie}} - \underbrace{V(r)}_{\text{Zentralpotential}}$$

φ ist zyklisch: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} = L_z = \text{const}$

$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$

Radialimpuls

$$H = \underbrace{\frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2}}_{T} + V(r)$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L_z^2}{2mr^2} + V(r) = H(r, p_r)$$

const!

: Reduktion ~~of~~ auf $f-1$ Freiheitsgrade!

Kanon. Transformation:

Lösung eines mechan. Problems durch Transf. $q_k \to Q_k$, so dass möglichst viele Koordinaten zyklisch werden!

alle Koordinaten Q_k zykl.: $\Rightarrow \tilde{H} = \tilde{H}(P_1, \ldots, P_f, t)$ wobei $P_k = \alpha_k = \text{const}$

Hamilton-BWGL: $\dot{Q}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k}$ hängt höchstens noch von der Zeit ab, da ja die Q_k nicht mehr vorkommen!

falls speziell $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \dot{Q}_k = \text{const}$$

$\Rightarrow Q_k = a_k t + b_k$

Konstanten

daraus folgen dann wieder die q_k aus Umkehrung der Transformationsgleichungen $\{q_k\} \Leftrightarrow \{Q_k\}$

Bedingungen für Kanonische Transformation

$\Leftrightarrow$ Transformation, die die Hamilton-Gleichungen forminvariant lassen

Erinnerung:

Die Hamilton'schen Gl. folgen aus dem modifizierten Hamilton'schen Prinzip

$$\delta S = \delta \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{k=1}^{f} p_k \dot{q}_k - H(\{q_k\}, \{p_k\}, t) \right)}_{S} \stackrel{!}{=} 0 \qquad (1)$$

(mit Variation nach $\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, \{p_k\}$

$\Rightarrow$ Auch für die transformierten Größen $\{Q_k\}, \{P_k\}, \tilde{H}$ muss gelten:

$$\delta \tilde{S} = \delta \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{k=1}^{f} P_k \dot{Q}_k - H(\{Q_k\}, \{P_k\}, t) \right)}_{\tilde{S}} \stackrel{!}{=} 0 \qquad (2)$$

Behauptung:

(2) ist erfüllt, wenn

$$\boxed{\sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k p_k - H(\{q_k\}, \{p_k\}, t) = \sum_{k=1}^{f} \dot{Q}_k P_k - \tilde{H}(\{Q_k\}, \{P_k\}, t) + \frac{d}{dt} M_1} \qquad (*)$$

mit $M_1 = M_1(\{q_k\}, \{Q_k\}, t)$

M_1 heißt Erzeugende der kanon. Transformation

Argumentation in mehreren Schritten

a) Zeige zunächst, dass die Erzeugende M_1 zusammen mit (*) tatsächlich eindeutige Transformationsgleichungen liefert
$$\{q_k\},\{p_k\} \longrightarrow \{Q_k\},\{P_k\}$$

$$M_1 = M_1(\{q_k\},\{Q_k\},t)$$
$$\Rightarrow \frac{dM_1}{dt} = \sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial M_1}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial M_1}{\partial Q_k}\dot{Q}_k\right) + \frac{\partial M_1}{\partial t}$$

Einsetzen in (*) und sortieren der Terme:

$$\sum_{k=1}^{f}\left(p_k - \frac{\partial M_1}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k = \sum_{k=1}^{f}\left(P_k + \frac{\partial M_1}{\partial Q_k}\right)\dot{Q}_k + H - \tilde{H} + \frac{\partial M_1}{\partial t}$$

$$\sum_{k=1}^{f}\underbrace{\left(p_k - \frac{\partial M_1}{\partial q_k}\right)}_{\overset{!}{=}0}\dot{q}_k - \sum_k \underbrace{\left(P_k + \frac{\partial M_1}{\partial Q_k}\right)}_{\overset{!}{=}0}\dot{Q}_k + \underbrace{\tilde{H} - H - \frac{\partial M_1}{\partial t}}_{\overset{!}{=}0} \overset{!}{=} 0$$
$\Longrightarrow$

Da wir hier $\{q_k\}$ und $\{Q_k\}$ als unabhängige Variable sehen, folgt:

$$\text{i)}\ p_k \overset{!}{=} \frac{\partial M_1}{\partial q_k}, \quad \text{ii)}\ P_k = -\frac{\partial M_1}{\partial Q_k}; \quad \text{iii)}\ \tilde{H} = H + \frac{\partial M_1}{\partial t}, \quad M_1 = M_1(\{q_k\},\{Q_k\},t)$$

Damit ist diese kanon. Transformation eindeutig bestimmt!

Denn: aus i) folgt durch Umkehrung ein Zusammenhang $Q_k \Leftrightarrow \{q_k\},\{p_k\}$

Einsetzen in ii) $\Rightarrow$ Zusammenhang $P_k \Leftrightarrow \{q_k\},\{p_k\}$

Voraussetz.: $\frac{\partial^2 M_1}{\partial q_k \partial Q_l} \neq 0$

b) Mit der Erzeugenden $M_1(\{q_k\},\{Q_k\},t)$ führt ① und ② tatsächlich auf die richtigen (forminvarianten) Hamilton'schen BWGL!

$$② \quad 0 \stackrel{!}{=} \delta \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{k=1}^{f} p_k \dot{q}_k - H \right)}_{①} \stackrel{*}{=} \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{k=1}^{f} P_k \dot{Q}_k - \tilde{H} + \frac{dM_1}{dt} \right)$$

$$= \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{k=1}^{f} P_k \dot{Q}_k - \tilde{H} \right) + \underbrace{\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{dM_1(\{q_k\},\{Q_k\},t)}{dt}}_{\delta\left(M_1(\{q_k(t_2)\},\{Q_k(t_2)\},t_2) - M_1(\{q_k(t_1)\},\{Q_k(t_1)\},t_1) \right)}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\overbrace{\sum_{k=1}^{f} \dot{Q}_k \delta P_k + P_k \delta \dot{Q}_k}^{\delta \sum_{k=1}^{f} P_k \dot{Q}_k} \overbrace{- \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} \delta Q_k - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} \delta P_k}^{\delta \tilde{H}} \right)$$

benutze Taylor bis zur 1. Ordnung!

$$\cancel{+ \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial M_1}{\partial q_k} \delta q_k \Big|_{t_1}^{t_2}} + \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial M_1}{\partial Q_k} \delta Q_k \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Auswertung an den Rändern!

Null, da $q_k(t_1)$ und $q_k(t_2)$ konstant bleiben bei der Variation!

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{f} \left(\dot{Q}_k \delta P_k + P_k \delta \dot{Q}_k - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} \delta Q_k - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} \delta P_k \right)$$

$$+ \sum_{k} \frac{\partial M_1}{\partial Q_k} \delta Q_k \Big|_{t_1}^{t_2}$$

bemerke nun noch:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \, P_k \, \delta \dot{Q}_k = \int_{t_1}^{t_2} dt \, P_k \frac{d}{dt} \delta Q_k \overset{\text{partiell integrieren}}{=} P_k \, \delta Q_k \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \, \dot{P}_k \, \delta Q_k$$

Einsetzen

$$\Rightarrow 0 \overset{!}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{f} \left(\left(\dot{Q}_k - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} \right) \delta P_k - \left(\dot{P}_k + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} \right) \delta Q_k \right)$$

$$+ \sum_{k=1}^{f} \underbrace{\left(\frac{\partial M_1}{\partial Q_k} + P_k \right)}_{0\,!} \delta Q_k \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Beachte nun noch, ~~dass~~ dass Q_k und P_k die neue unabhängige Variablen sind!

und $\frac{\partial M_1}{\partial k} + P_k = 0$ wegen a (i))

$$\Rightarrow \boxed{\dot{Q}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} \quad \text{und} \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k}}$$ Hamilton-Gl. in den neuen Variablen!

q.e.d.

Folgerung

gegeben Erzeugende $M_1(\{q_k\}, \{Q_k\}, t)$

aus a) $\tilde{H} = H + \frac{\partial M_1}{\partial t}$

$$p_k = \frac{\partial M_1}{\partial q_k} \quad , \quad P_k = -\frac{\partial M_1}{\partial Q_k}$$

$\Downarrow$ Q_k

Beispiel siehe später!

Es gibt noch weitere Formen für die erzeugende Funktion

Unterziehe $M_1(\{q_k\},\{Q_k\},t)$ einer Legendretransformation bzgl. der $\{Q_k\}$

$$-\mathcal{L}\, M_1(\{q_k\},\{Q_k\},t)$$

$$= -\Big(\sum_{k=1}^{f} Q_k \underbrace{\frac{\partial M_1}{\partial Q_k}}_{-P_k!\ \text{siehe a)}} - M_1(\{q_k\},\{Q_k\},t) \Big)$$

$$= M_1(\{q_k\},\{Q_k\},t) + \sum_{k=1}^{f} Q_k P_k$$

$$=: M_2(\{q_k\},\{P_k\},t)$$

Differential von M_2

$$dM_2 = dM_1 + \sum_k dQ_k P_k + \sum_k Q_k \, dP_k$$

siehe "alte" Diskussion Übergang Lagrange → Hamilton

benutze: $$\frac{dM_1}{dt} = \sum_k \left(\frac{\partial M_1}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial M_1}{\partial Q_k} \dot{Q}_k \right) + \frac{\partial M_1}{\partial t}$$

$$= \underbrace{\tilde{H} - H + \sum_k (p_k \dot{q}_k - P_k \dot{Q}_k)}_{\text{a) i)–iii)}}$$

$$\Leftrightarrow dM_1 = (\tilde{H} - H)dt + \sum_k (p_k dq_k - P_k \, dQ_k)$$

Einsetzen in dM_2

$$\Rightarrow dM_2 = \sum_k (p_k dq_k + Q_k \, dP_k) + (\tilde{H} - H)dt \qquad (*)$$

<u>Folgerungen</u>:

i) Die Variablen von M_2 sind tatsächlich die $\{q_k\}$, $\{P_k\}$, t !

ii) Durch Vergleich von $(*)$ mit dem "naiven" Differential

$$dM_2(\{q_k\},\{P_k\},t) = \sum_k \left(\frac{\partial M_2}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial M_2}{\partial P_k} dP_k \right) + \frac{\partial M_2}{\partial t} dt$$

Koeffizientenvergleich $\stackrel{!}{=} (*)$

$$p_k \stackrel{!}{=} \frac{\partial M_2}{\partial q_k}, \quad Q_k = \frac{\partial M_2}{\partial P_k}, \quad \frac{\partial M_2}{\partial t} = \tilde{H} - H$$

liefert explizite Transformationsgleichungen!

Weitere Erzeugende:

- Legendre-Trafo von $M_1(\{q_k\},\{Q_k\},t)$ bezgl. $\{q_k\}$

$$M_3(\{p_k\},\{Q_k\},t) = M_1(\ldots) - \sum_k \underbrace{\frac{\partial M_1}{\partial q_k}}_{p_k} q_k$$

man findet: (analog ~~zu M~~ zur Vorgehensweise bei M_2)

$$q_k = -\frac{\partial M_3}{\partial p_k}, \quad P_k = -\frac{\partial M_3}{\partial Q_k}, \quad \frac{\partial M_3}{\partial t} = \tilde{H} - H$$

- Legendre-Trafo von M_1 bezgl. $\{q_k\}$ und $\{Q_k\}$

$$M_4(\{p_k\},\{P_k\},t) = M_1(\ldots) - \sum_k \left(\underbrace{\frac{\partial M_1}{\partial q_k}}_{p_k} q_k + \underbrace{\frac{\partial M_1}{\partial Q_k}}_{-P_k} Q_k \right)$$

man findet $\quad q_k = -\frac{\partial M_4}{\partial p_k}, \quad Q_k = \frac{\partial M_4}{\partial P_k}, \quad \frac{\partial M_4}{\partial t} = \tilde{H} - H$

1. Beispiel für kanonische Transformation:

Wähle als Erzeugende $M_1(\{q_k\},\{Q_k\},t) = -\sum_{k=1}^{f} q_k Q_k$

$$p_k = \frac{\partial M_1}{\partial q_k} \stackrel{\checkmark}{=} -Q_k, \quad P_k \stackrel{\checkmark}{=} -\frac{\partial M_1}{\partial Q_k} = q_k$$

also $\{q_k\},\{p_k\} \longrightarrow \{P_k\}, \{-Q_k\}$ also Vertauschung von Orten und Impulsen!

Diese Vertauschung hätte man auch machen können mit $M_4(\{p_k\},\{P_k\},t) = -\sum_{k=1}^{f} p_k P_k$