4.4 Hydrodynamische Bew.gleichungen

4.4.1 Erhaltungssätze

· Bilanzgleichung:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\langle\chi^\alpha\rangle + \underline{\nabla}_q\cdot\frac{1}{m}\langle\underline{p}\,\chi^\alpha\rangle = \underline{F}\cdot\langle\underline{\nabla}_p\,\chi^\alpha\rangle} \qquad (4.33)$$

(i) Teilchenzahlerhaltung: $\chi^5 = 1$

$$\boxed{\begin{array}{l}\frac{\partial}{\partial t}n + \underline{\nabla}_q\cdot\underline{j} = 0\\ \quad \text{mit } \underline{j} = n\underline{u} = \left\langle\frac{\underline{p}}{m}\right\rangle\end{array}} \qquad (4.34)$$

(ii) Impulserhaltung: $\chi^i = p_i$

(4.35)

$$\boxed{m\frac{\partial}{\partial t}j_i + \nabla_j\big(\underbrace{\underbrace{mnu_iu_j}_{mj_i} - T_{ij}}_{\text{Impulsstromdichte}}\big) = nF_i}$$

mnu_iu_j ... konvektiver Anteil = Impulsdichte × Geschw.

$T_{ij} = -m\langle c_i c_j\rangle$ ... Spannungstensor (=− Drucktensor)

nF_i ... Volumenkraftdichte äußerer Kräfte

Umschreibung:

$$m\frac{\partial}{\partial t}nu_i + \nabla_j(mnu_iu_j)$$

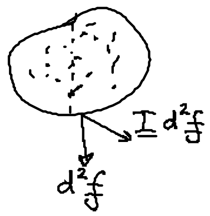
$$= mn\frac{\partial}{\partial t}u_i + \underbrace{mu_i\frac{\partial}{\partial t}n + mu_i\nabla_j(nu_j)}_{mu_i\left(\frac{\partial}{\partial t}n + \nabla_j(nu_j)\right)\overset{(4.34)}{=}0} + mnu_j\nabla_j u_i$$

(4.35) ⟶

$$\boxed{\underbrace{mn}_{\substack{\text{Massen-}\\ \text{dichte}}}\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \underbrace{\underline{u}\cdot\underline{\nabla}_q}_{\text{konvektive}}\right)}_{\substack{\text{totale/materielle}\\ \text{Zeitableitung [s.u.]}}}u_i = \underbrace{\nabla_j T_{ij}}_{\text{Oberflächenkräfte!}} + nF_i} \qquad (4.36)$$

$\left[\int d^3q\,\nabla_j T_{ij} \overset{\text{Gauß}}{=} \oint T_{ij}\,d^2f_j\,!\right]$

z.B. Druck-/Reibungskräfte



(4.36) ≡ Newtonsche Grundgleichung:

linke Seite: Beschleunigung eines Volumenelements mit Geschw. $\underline{u}$

denn: $\frac{d}{dt} u_i(q,t) = \frac{\partial}{\partial t} u_i + \underbrace{\dot q_j}_{u_j} \nabla_j u_i$

rechte " : Oberflächen (= innere) s.o. + äußere Kräfte auf Vol.element

(iii) Energieerhaltung: $\chi^5 = \frac{p^2}{2m}$

(1) $\frac{1}{m} \langle p_i \chi^5 \rangle = \langle (u_i + c_i) \frac{p^2}{2m} \rangle$ $\qquad u_j^2 + 2u_j c_j + c_j^2$

$= u_i \langle \frac{p^2}{2m} \rangle + \frac{m}{2} \langle c_i \overbrace{(u_j + c_j)^2}^{u_j^2+2u_jc_j+c_j^2} \rangle$

$\overset{\langle c_i \rangle = 0}{=} n u_i \left(\frac{m}{2}\underline{u}^2 + e\right) + \underbrace{m u_j \langle c_i c_j \rangle}_{-u_j T_{ij}} + \langle c_i \frac{m}{2} c_j^2 \rangle$

(2) $\langle \underline{\nabla}_p \frac{p^2}{2m} \rangle = \langle \frac{p}{m} \rangle = \underline{j}$

mit (1), (2) in (4.33) $\longrightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left[n\left(\frac{m}{2}\underline{u}^2 + e\right)\right] + \nabla_i \Big[\underbrace{\underbrace{n u_i \left(\frac{m}{2}\underline{u}^2 + e\right)}_{\text{konvektiver Anteil}} \underbrace{- T_{ij} u_j}_{\text{innere Kräfte}} + \underbrace{q_i}_{\text{Wärmestrom}}}_{\text{Energiestromdichte}}\Big] = \underbrace{\underline{j} \cdot \underline{F}}_{\text{Leistung der äußeren Kräfte}}} \quad (4.37)$$

mit $\boxed{q_i = \langle c_i \frac{m}{2} c_j^2 \rangle}$ ... Wärmestromdichte (4.38)

Umformung mit Hilfe von (4.34) & (4.36): o.B.

$$\longrightarrow \boxed{\underbrace{n\left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{u}\cdot\underline{\nabla}\right) e}_{\text{zeitl. Änderung der inneren Energie für bewegtes Vol.element}} = \underbrace{- \underline{\nabla} \cdot \underline{q}}_{\text{Wärmefluß}} + \underbrace{T_{ij} \nabla_i u_j}_{\text{mechan. Leistung der inneren Kräfte}}} \quad (4.38)$$

[vgl. Thermodynamik: $dU = đQ + dW$]

4.4.2 Hydrodynamische Gleichungen ohne Dissipation

- Materialgesetze für Spannungstensor $\underline{\underline{T}}$ und Wärmestromdichte $\underline{q}$
  ≡ explizite Berechnung mit $f(q, p, t)$

Annahme: Lokales GG:

$$f_0(q,p,t) = \frac{n}{[2\pi m k_B T]^{3/2}} \exp\Big[-\underbrace{\frac{(p-mu)^2}{2mk_BT}}\Big] \qquad (4.29)$$

$$\text{mit } n, T, \underline{u} = n, T, \underline{u}(q,t) \qquad \xrightarrow{\underline{c} = \frac{p}{m} - \underline{u}} \Big[\frac{-\underline{c}^2}{2k_BT/m}\Big]$$

Bemerkung: $\left.\frac{\partial f_0}{\partial t}\right|_{\text{Stoß}} = 0$, aber $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m} p \cdot \nabla_q + \underline{F} \cdot \nabla_p\right) f_0 \neq 0$!

[Boltzmann-Gl. nicht gelöst]

- Berechnung Mittelwerte: (4.39)

$$\boxed{\langle c_i c_j \rangle_0 \overset{(4.29)}{=} n \frac{k_B T}{m} \delta_{ij}}$$

$$T_{ij}^0 = -m \langle c_i c_j \rangle_0 = -P\,\delta_{ij}$$

mit $P = n k_B T$ ... Druck

... ideale Gasgleichung

$$q_i^0 = \langle c_i \tfrac{m}{2} c_j^2 \rangle_0 = 0 \quad [\text{keine Dissipation}]$$

$$ne = \frac{m}{2} \langle \underline{c}^2 \rangle_0 = \frac{3}{2} n k_B T$$

... kalorische Zustandsgleichung [Äquipartitionstheorem]

(4.40)

$\Longrightarrow$ explizite Erhaltungssätze: $\boxed{\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla_q}$ (4.41)

(4.34) $\longrightarrow$

(4.36) $\xrightarrow{\nabla_i T_{ij} = -\nabla_j P}$

(4.38) $\xrightarrow[= -P \nabla_q \cdot \underline{u}]{T_{ij} \nabla_i u_j =}$

$$\frac{\partial}{\partial t} n = -\nabla_q \cdot (n\underline{u}) \qquad (4.42)$$

$$mn \frac{d}{dt} \underline{u} = -\nabla_q P + n \underline{F} \quad , \quad P = n k_B T \qquad (4.43)$$

$$\frac{d}{dt} T = -\frac{2}{3} T \nabla_q \cdot \underline{u} \qquad (4.44)$$

- Bemerkungen:

(1) Gl. (4.42) – (4.44) invariant unter Zeitumkehr ($t \to -t$, $\underline{u} \to -\underline{u}$)

$\longrightarrow$ enthalten keine Dissipation

$\longrightarrow$ Störungen des GG-Zustandes relaxieren nicht gegen Null

(2) Verdeutlichung:

$$(4.42) \rightarrow \frac{d}{dt} n = - n \nabla_q \cdot \underline{u} \longrightarrow \nabla_q \cdot \underline{u} = -\frac{1}{n}\frac{d}{dt} n = -\frac{d}{dt} \ln n$$

$$\xrightarrow[(4.44)]{\text{in}} \frac{d}{dt} T = \frac{2}{3} T \frac{d}{dt} \ln n \longrightarrow \frac{3}{2}\frac{d}{dt} \ln T = \frac{d}{dt} \ln n$$

$$\longrightarrow \frac{d}{dt} \underbrace{\ln\left(n T^{-\frac{3}{2}}\right)}_{\substack{\sim \text{ lokale Entropie} \\ \text{des Gases (s. B)} \\ \text{ändert sich nicht!}}} = 0$$

(3) (4.43) ≡ Eulersche Gl.

Beschreibung von Strömungen kompressibler Gase

- Modenanalyse von (4.42) – (4.44): s. Übungen

(i) Setze:

$$n = \bar{n} + \delta n(q,t)$$
$$T = \bar{T} + \delta T(q,t)$$
$$\underline{u} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{homogener} \\ \text{GG-Zustand}}}{0} + \underbrace{\underline{u}(q,t)}_{\text{kleine Abweichungen}}$$

(ii) linearisiere (4.42) – (4.44) in $\delta n, \delta T, \underline{u}$

(iii) Löse durch Modenansatz:

$$\begin{pmatrix} \delta n \\ \delta T \\ \underline{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta n(\underline{k},\omega) \\ \delta T(\underline{k},\omega) \\ \underline{u}(\underline{k},\omega) \end{pmatrix} e^{-i(\omega t - \underline{k}\cdot q)}$$

$\longrightarrow$ Dispersionsrelation: $\omega = \omega(\underline{k})$

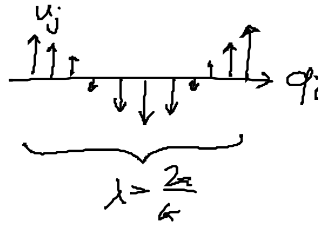
(iv) Ergebnisse: 2 statische Schermoden: $\omega_{1/2} = 0$ (*)

1 statische Temp./Dichtemode: $\omega_3 = 0$ (**)

2 Schallwellen: $\omega_{4/5} = \pm c_s |k|$

mit $c_s = \sqrt{\frac{5}{3}\frac{k_B T}{m}}$ ... Schallgeschw.

keine Dämpfung

(*) 

statisches Geschw.profil

$\longrightarrow$ Gas kann aneinander vorbeischieben, weil keine Dissipation (αc) $\underline{\nabla}\, \delta T + \frac{\bar{T}}{\bar{n}} \underline{\nabla}\, \delta n = 0\,!$