4.4 Hydrodynamische Bew.gleichungen

4.4.1 Erhaltungssätze

· Bilanzgleichung:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\langle\chi^\alpha\rangle + \nabla_q\cdot\frac{1}{m}\langle p\,\chi^\alpha\rangle = F\cdot\langle\nabla_p\,\chi^\alpha\rangle} \qquad (4.33)$$

(i) Teilchenzahlerhaltung: $\chi^5 = 1$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}n + \nabla_q\cdot j = 0 \quad \text{mit } j = n\,u = \left\langle\frac{p}{m}\right\rangle} \qquad (4.34)$$

(ii) Impulserhaltung: $\chi^i = p_i$

(4.35)

$$m\frac{\partial}{\partial t}j_i + \nabla_j\big(\underbrace{\underbrace{m\,n\,u_i u_j}_{m j_i} - T_{ij}}_{\text{Impulsstromdichte}}\big) = n F_i$$

$m\,n\,u_i u_j$ … konvektiver Anteil = Impulsdichte × Geschw.

$T_{ij} = -m\langle c_i c_j\rangle$ … Spannungstensor (= − Drucktensor)

nF_i … Volumenkraftdichte äußerer Kräfte

Umschreibung:

$$m\frac{\partial}{\partial t}n u_i + \nabla_j(m n\,u_i u_j)$$

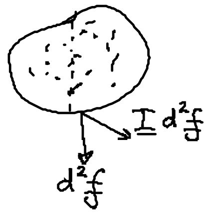
$$= m n\frac{\partial}{\partial t}u_i + \underbrace{m u_i\frac{\partial}{\partial t}n + m u_i\nabla_j(n u_j)}_{m u_i\left(\frac{\partial}{\partial t}n + \nabla_j(n u_j)\right)\overset{(4.34)}{=}0} + m n\,u_j\nabla_j u_i$$

(4.35) $\longrightarrow$

$$\boxed{\underbrace{m n}_{\text{Massendichte}}\underbrace{\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \underbrace{u\cdot\nabla_q}_{\text{konvektive}}\Big)}_{\substack{\text{totale/materielle}\\ \text{Zeitableitung [s.u.]}}} u_i = \underbrace{\nabla_j T_{ij}}_{\text{Oberflächenkräfte!}} + n F_i} \qquad (4.36)$$

$\left[\int d^3q\,\nabla_j T_{ij} \overset{\text{Gauß}}{=} \oint T_{ij}\,d^2f_j\ !\right]$

z.B. Druck-/Reibungskräfte



(4.36) ≡ Newtonsche Grundgleichung:

linke Seite: Beschleunigung eines Volumenelements mit Geschw. $\underline{u}$

$$\text{denn:}\quad \frac{d}{dt} u_i(q,t) = \frac{\partial}{\partial t} u_i + \underbrace{\dot{q}_j}_{u_j} \nabla_j u_i$$

rechte " : Oberfläche (= innere) s.o. + äußere Kräfte auf Vol.element

(iii) Energieerhaltung: $\chi^5 = \frac{p^2}{2m}$

$$(1)\quad \frac{1}{m}\langle p_i \chi^5 \rangle = \langle (u_i + c_i)\frac{p^2}{2m}\rangle \qquad u_j^2 + 2u_j c_j + c_j^2$$

$$= u_i \langle \frac{p^2}{2m}\rangle + \frac{m}{2}\langle c_i \overbrace{(u_j+c_j)^2}\rangle$$

$$\overset{\langle c_i\rangle = 0}{=} n u_i \left(\frac{m}{2}\underline{u}^2 + e\right) + \underbrace{m u_j \langle c_i c_j\rangle}_{-u_j T_{ij}} + \langle c_i \frac{m}{2} c_j^2 \rangle$$

$$(2)\quad \langle \nabla_p \frac{p^2}{2m}\rangle = \langle \frac{p}{m}\rangle = j$$

$$\xrightarrow[\text{in (4.33)}]{\text{mit (1),(2)}} \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left[n\left(\frac{m}{2}\underline{u}^2+e\right)\right] + \nabla_i \underbrace{\left[\underbrace{n u_i\left(\frac{m}{2}\underline{u}^2+e\right)}_{\text{konvektiver Anteil}} \underbrace{- T_{ij} u_j}_{\text{innere Kräfte}} + \underbrace{q_i}_{\text{Wärmestrom}}\right]}_{\text{Energiestromdichte}} = \underbrace{j \cdot \underline{F}}_{\text{Leistung der äußeren Kräfte}}} \quad (4.37)$$

mit $\boxed{q_i = \langle c_i \frac{m}{2} c_j^2 \rangle}$ ... Wärmestromdichte (4.38)

Umformung mit Hilfe von (4.34) & (4.36): o.B.

$$\longrightarrow \boxed{\underbrace{n\left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{u}\cdot\underline{\nabla}\right)e}_{\substack{\text{zeitl. Änderung}\\ \text{der inneren Energie}\\ \text{für bewegtes Vol.}\\ \text{element}}} = \underbrace{-\underline{\nabla}\cdot q}_{\text{Wärmefluß}} + \underbrace{T_{ij}\nabla_i u_j}_{\substack{\text{mechan. Leistung}\\ \text{der inneren Kräfte}}}} \quad (4.38)$$

[vgl. Thermodynamik: $dU = đQ + dW$]

4.4.2 Hydrodynamische Gleichungen ohne Dissipation

- Materialgesetze für Spannungstensor $\underline{\underline{T}}$ und Wärmestromdichte q ≡ explizite Berechnung mit $f(q,p,t)$

Annahme: Lokales GG:

$$f_0(q,p,t) = \frac{n}{[2\pi m k_B T]^{3/2}} \exp\Big[-\underbrace{\frac{(p-mu)^2}{2m k_B T}}\Big] \qquad (4.29)$$

mit $n, T, u = n, T, u(q,t)$ $\qquad \xrightarrow{c = \frac{p}{m} - u} \left[\frac{-c^2}{2k_BT/m}\right]$

Bemerkung: $\left.\frac{\partial f_0}{\partial t}\right|_{\text{Stoß}} = 0$, aber $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m} p \cdot \nabla_q + F \cdot \nabla_p\right) f_0 \neq 0$!

[Boltzmann-Gl. nicht gelöst]

- Berechnung Mittelwerten: (4.39)

$$\boxed{\langle c_i c_j \rangle_0 \overset{(4.29)}{=} n \frac{k_B T}{m} \delta_{ij}}$$

$$T_{ij}^0 = -m \langle c_i c_j \rangle_0 = -P\,\delta_{ij}$$

mit $P = n k_B T$ ... Druck ... ideale Gasgleichung

$$q_i^0 = \langle c_i \tfrac{m}{2} c_j^2 \rangle_0 = 0 \quad \text{[keine Dissipation]}$$

$$ne = \frac{m}{2} \langle c^2 \rangle_0 = \frac{3}{2} n k_B T$$

... kalorische Zustandsgleichung [Äquipartitionstheorem]

(4.40)

$\Longrightarrow$ explizite Erhaltungssätze: $\boxed{\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla_q}$ (4.41)

(4.34) $\longrightarrow$ $\qquad \frac{\partial}{\partial t} n = -\nabla_q \cdot (n u)$ $\qquad$ (4.42)

(4.36) $\xrightarrow{\nabla_i T_{ij} = -\nabla_j P}$ $\qquad m n \frac{d}{dt} u = -\nabla_q P + n F, \quad P = n k_B T$ $\qquad$ (4.43)

(4.38) $\xrightarrow[= -P \nabla_q \cdot u]{T_{ij} \nabla_i u_j =}$ $\qquad \frac{d}{dt} T = -\frac{2}{3} T \nabla_q \cdot u$ $\qquad$ (4.44)

- Bemerkungen:
  (1) Gl. (4.42)–(4.44) invariant unter Zeitumkehr ($t \to -t$, $u \to -u$)
  $\longrightarrow$ enthalten keine Dissipation
  $\longrightarrow$ Störungen des GG-Zustandes relaxieren nicht gegen Null

(2) Verdeutlichung:

$$(4.42) \rightarrow \frac{d}{dt} n = - n \nabla_q \cdot \underline{u} \longrightarrow \nabla_q \cdot \underline{u} = -\frac{1}{n} \frac{d}{dt} n = - \frac{d}{dt} \ln n$$

$$\xrightarrow[(4.44)]{\text{in}} \frac{d}{dt} T = \frac{2}{3} T \frac{d}{dt} \ln n \longrightarrow \frac{3}{2} \frac{d}{dt} \ln T = \frac{d}{dt} \ln n$$

$$\longrightarrow \frac{d}{dt} \underbrace{\ln\left(n T^{-\frac{3}{2}}\right)}_{\sim \text{ lokale Entropie des Gases (s.o.)}} = 0$$

ändert sich nicht!

(3) (4.43) $\equiv$ Eulersche Gl.

Beschreibung von Strömungen kompressibler Gase

- Modenanalyse von (4.42) – (4.44): s. Übungen

(i) Setze:

$$n = \bar{n} + \delta n(q,t)$$
$$T = \bar{T} + \delta T(q,t)$$
$$\underline{u} = 0 + \underbrace{\underline{u}(q,t)}_{\text{kleine Abweichungen}}$$

homogener GG-Zustand

(ii) linearisiere (4.42) – (4.44) in δn, δT, $\underline{u}$

(iii) Löse durch Modenansatz:

$$\begin{pmatrix} \delta n \\ \delta T \\ \underline{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta n(\underline{k},\omega) \\ \delta T(\underline{k},\omega) \\ \underline{u}(\underline{k},\omega) \end{pmatrix} e^{-i(\omega t - \underline{k}\cdot \underline{q})}$$

$\longrightarrow$ Dispersionsrelation: $\omega = \omega(\underline{k})$

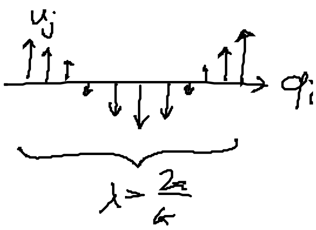
(iv) Ergebnisse: 2 statische Schermoden: $\omega_{1/2} = 0$ (*)

1 statische Temp./Dichtemode: $\omega_3 = 0$ (**)

2 Schallwellen: $\omega_{4/5} = \pm c_s |\underline{k}|$

mit $c_s = \sqrt{\frac{5}{3} \frac{k_B T}{m}}$ ... Schallgeschw.

keine Dämpfung

(*) 

statisches Geschw.profil $\longrightarrow$ Gas kann aneinander vorbeischeren, weil keine Dissipation (αα) $\underline{\nabla}\,\delta T + \frac{\bar{T}}{\bar{n}}\,\underline{\nabla}\,\delta n = 0\,!$