4.4.3 Hydrodynamische Gleichungen mit Dissipation

- Boltzmann-Gl.: $\mathcal{L}[f] = \left.\frac{df}{dt}\right|_{\text{Stoß}}$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{mit } \mathcal{L}[f] = \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m}\,\underline{p}\cdot\underline{\nabla}_q + \underline{F}\cdot\underline{\nabla}_p\right] \\ &\left(\tfrac{\underline{p}}{m} = \underline{u} + \underline{c}\right) = \left[\frac{d}{dt} + \underline{c}\cdot\underline{\nabla}_q + \frac{1}{m}\,\underline{F}\cdot\underline{\nabla}_c\right] \end{aligned}} \quad (4.45)$$

- Problem: $\left.\frac{df_0}{dt}\right|_{\text{Stoß}} = 0$, aber $\mathcal{L}[f_0] \neq 0$, f_0 s. (4.29) lokales GG

- Näherungslösung: „1. Ordng"
  (i) $f = f_0(1+\Delta)$ mit $\Delta \ll 1$
  (ii) Relaxationszeitnäherung für Stoßterm:
  $$\left.\frac{df}{dt}\right|_{\text{Stoß}} = -\frac{1}{\tau} f_0 \Delta$$

in Gl. (4.45): $\mathcal{L}[f_0 + f_0\Delta] = -\frac{1}{\tau} f_0 \Delta$

& $\mathcal{L}[f_0\Delta] \ll \mathcal{L}[f_0] \longrightarrow \mathcal{L}[f] \approx \mathcal{L}[f_0]$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\Delta \approx -\tau \frac{1}{f_0}\mathcal{L}[f_0] = -\tau\,\mathcal{L}[\ln f_0]} \quad (4.46)$$

berechne $\mathcal{L}[\ln f_0]$ & Annahme $n(q,t)$, $\underline{u}(q,t)$, $T(q,t)$ in f_0 lösen (4.42) – (4.44)

$$\xrightarrow{\text{o.B.}} \quad \boxed{\begin{aligned} &f = f_0(1+\Delta) \\ &\text{mit } \Delta = -\tau\frac{m}{k_B T}\left(c_i c_j - \frac{\delta_{ij}}{3}\underline{c}^2\right) D_{ij} - \tau\left(\frac{m\underline{c}^2}{2k_B T} - \frac{5}{2}\right)\frac{c_i}{T}\nabla_i T \end{aligned}} \quad (4.47)$$

$D_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)$ ... Deformationsrate

- Mittelwerte:

$$\boxed{\langle A\rangle = \int d^3p\, A\, f_0(1+\Delta) = \langle A(1+\Delta)\rangle_0} \quad (4.48)$$

- Spannungstensor „1. Ordnung":

$$T_{ij} \overset{(4.35)}{=} -m\langle c_i c_j\rangle \overset{(4.47)}{=} -m\left[\langle c_i c_j\rangle_0 - \frac{\tau m}{k_BT}\left\langle c_i c_j\left(c_k c_l - \frac{\delta_{kl}}{3} c^2\right)\right\rangle_0 D_{kl}\right]$$

$\xrightarrow[\text{o.B.}]{}$

$\langle c_i c_j\rangle_0 = n\frac{k_BT}{m}\delta_{ij}$

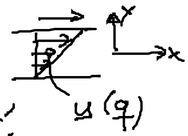
$\langle c_i c_j c_k c_l\rangle_0 = n\left(\frac{k_BT}{m}\right)^2 \times(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})$

$$\boxed{T_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \underbrace{2\eta\left(D_{ij} - \tfrac13\delta_{ij}D_{kk}\right)}_{T'_{ij}\ \ldots\ \text{viskoser Spannungstensor}}} \quad (4.49)$$

mit $p = nk_BT$ ... Druck

$\eta = nk_BT\tau$ ... Scherviskosität

Deutung: (i) Scherströmung:



- $D_{ij} - \frac13\delta_{ij}D_{kk} \neq 0 \longrightarrow T'_{ij}$
- nicht zeitumkehrinvariant: $T'(-D_{ij}) = -T'(D_{ij})$

$\longrightarrow$ Dissipation

$\longrightarrow$ Relaxation von Schermoden ins GG

- $\mathrm{Sp}\,\underline{D} = D_{ii} = \operatorname{div}\underline{u}$ ... Spur von $\underline{D}$

also: $\underline{D} - \frac13 \mathbb{1}\operatorname{div}\underline{u} = 0$ für $\underline{D} = \frac13\mathbb{1}\operatorname{div}\underline{u}$!! reine Kompression

NB: (4.42) $\longrightarrow \frac{d}{dt}n = -n\operatorname{div}\underline{u} = 0$ ≙ inkompressible Strömung

(ii) keine extra Volumenviskosität

kein Beitrag: $T'_{ij} \sim D_{ii} = \operatorname{div}\underline{u}$

- Wärmestromdichte „1. Ordnung":

$$q_i \overset{(4.38)}{=} \left\langle c_i \frac{m}{2} c^2\right\rangle \overset{(4.47)}{=} -\frac{m\tau}{2}\left\langle\left(\frac{mc^2}{2k_BT}-\frac52\right)c_i c_k c^2\right\rangle_0 \frac{\nabla_k T}{T}$$

$\xrightarrow[\text{o.B.}]{}$

$$\boxed{q = -\kappa\nabla_q T \quad \text{mit } \kappa = \frac52 n\frac{k_B^2T}{m}\tau} \quad (4.50)$$

... thermische Leitfähigkeit

$q \sim -\nabla_q T \longrightarrow q$ gleicht $\nabla_q T$ aus

$\longrightarrow$ Relaxation ins GG

· Hydrodynamische Gleichungen:

(4.34) $\longrightarrow$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\underline{\nabla}_q \cdot (n\,\underline{u}) \qquad (4.51)$$

(4.36) $\xrightarrow{\underline{\nabla}\cdot T_{ij} = \dots}$ $F_i = 0$

$$mn \frac{d}{dt}\underline{u} = -\underline{\nabla}_q P + \eta \underline{\nabla}_q^2 \underline{u} + \frac{1}{3}\eta \underline{\nabla}_q (\underline{\nabla}_q \cdot \underline{u}) \qquad (4.52)$$

(4.38) $ne = \frac{m}{2}\langle c^2\rangle = \frac{3}{2} n k_B T$ $\longrightarrow$ $-\underline{\nabla}_q\cdot \underline{q}$, $T_{ij}\nabla_i u_j$

$$\frac{d}{dt}T = \frac{2\varkappa}{3nk_B}\underline{\nabla}_q^2 T - \frac{2}{3}T\,\underline{\nabla}_q\cdot\underline{u} + \frac{2}{3nk_B}T_{ij}'\nabla_i u_j \qquad (4.53)$$

Bem.: (1) Gl. (4.52) $\equiv$ Navier-Stokes-Gl. für kompressible Flüssigkeiten

aber: Viskosität für reine Kompression: $\eta_k + \frac{1}{3}\eta$ statt $\frac{1}{3}\eta$!

(2) Gl. (5.53): für $\nabla_i u_j = 0 \longrightarrow$ reine Diff. Gl. für T

$T_{ij}'\nabla_i u_j$ ... nichtlinearer Term in $\underline{u}$!

· Modenanalyse: (wie in Kap. 4.4.2) $\lceil e^{-i(\omega t - \underline{k}\cdot\underline{r})}$

2 diffusive Schermoden: 

Dispersionsrelation: $\omega_{1/2} = -i\frac{\eta}{m\bar{n}}k^2$ ($\bar{n}$ ... mittlere Dichte)

Dämpfungsrate $-i\omega \to 0$ für $k \to 0$

$\triangleq$ hydrodynamische Mode

1 diffusive „Temperaturmode" ω_3

2 gedämpfte Schallwellen

$$\omega_{4/5} = \pm c_s k - ik^2\left(\frac{2\eta}{3m\bar{n}} + \frac{2\varkappa}{15k_B\bar{n}}\right) + O(k^2)$$

5. Statistische Ensemble

· Ziel: Zugang zu makroskop. Eigenschaften von Vielteilchen-Systemen durch Mittelung über viele mikroskop. Realisierungen insbesondere: $\underbrace{S, U, F, H, G, \ldots}_{\text{thermodynam. Potentiale}}$

- **Weg:** Wähle Ensemble von Mikrozuständen durch Festlegung von Randbedingungen $\longrightarrow$ Charakterisieren die Makrozustände
- **Beachte:** Im thermodynam. Limes $N \to \infty$ sind alle Ensemble äquivalent

5.1. Mikrokanonisches Ensemble

- **Def:** Alle zugängliche Mikrozustände eines abgeschlossenen System (also mit Energie U = konstant, und V, N, = konstant) bilden das mikrokan. Ensemble.

- Liouville Theorem: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\{\rho, H\}$

  stationärer Zustand = thermisches GG: mögl. Lsg. $\rho_{eq} = \rho(H = U) = $ konstant

$\longrightarrow$ Postulat gleicher a priori Wahrscheinlichkeit für Mikrozustände mit Energie U:

$$P(s) = \frac{1}{g(U)} \qquad (5.1)$$

mit $g(U)$ ... Anzahl aller zugänglichen Mikrozustände mit Energie U [und V, N]

- Postulat der Boltzmannschen Entropie:

$$\boxed{S := k_B \ln g(U)} \qquad (5.2)$$

mit $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\, J/K$ ... Boltzmannsche Konstante

- QM: i indiziert Eigenzustände mit Energie-EWE
- klass. Mechanik:

$$\boxed{g(U) = \frac{1}{N!} \int \frac{1}{h^{3N}}\, d\Gamma \quad \text{mit } d\Gamma = \prod_i d^3q_i\, d^3p} \qquad (5.3)$$