4.3.3 Gleichgewichtseigenschaften

$$f_1 f_2 = f_3 f_4 \longrightarrow \ln f_1 + \ln f_2 = \ln f_3 + \ln f_4$$

$$\longrightarrow \boxed{f(\underline{q},\underline{p},t) = n(\underline{q},t)\,\frac{1}{[2\pi m k_B T(\underline{q},t)]^{3/2}}\exp\left[-\frac{(\underline{p}-m\underline{u}(\underline{q},t))^2}{2m k_B T(\underline{q},t)}\right]}$$

mit $n(\underline{q},t)$ .... Teilchenzahldichte

$k_B T(\underline{q},t) = \beta^{-1}$ ... lokale Temp. (s.u.)

$m\,\underline{u}(\underline{q},t) = \langle \underline{p} \rangle$ .. lokaler mittlerer Impuls (4.29)

... lokale Maxwell-Verteilung

" Gleichgewichtsverteilung

bis jetzt: $\left.\frac{df}{dt}\right|_{\text{Stoß}} = 0$

$\longrightarrow$ globales Gleichgewicht: $\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \;\wedge\; \{H_1, f\} = 0$

für Gas im Volumen V mit $U = 0$ (äußeres Pot.) $\longrightarrow \begin{cases} n = \frac{N}{V} = \text{konst.} \\ T = \quad " \\ \underline{u} = \quad 0 \end{cases}$

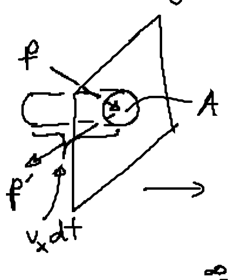
$$\boxed{f(\underline{q},\underline{p}) = \frac{n}{(2\pi m k_B T)^{3/2}}\exp\left(-\frac{\underline{p}^2}{2m k_B T}\right)} \qquad (4.30)$$

... Maxwellverteilung

original: $\underline{p} \longrightarrow m\underline{v}$

(ii) Zustandsgleichung: für Gas mit N Teilchen im Vol. V

- Druck $\hat{=}$ Kraft auf Wand von reflektierten Teilchen



Zahl der Teilchen mit $\underline{p}$, die A treffen in dt: $dN(\underline{p}) = \underbrace{f(\underline{p})\,d^3p}_{\text{Dichte}}\;\underbrace{(A v_x dt)}_{\text{Volumen von Teilchen, die A treffen}}$

$$\left[F = \frac{dp}{dt}\right] \longrightarrow F = \int_0^\infty dp_x \int_{-\infty}^\infty dp_y \int_{-\infty}^\infty dp_z\; \underbrace{f(\underline{p})\,d^3p\,\left(A\,\frac{p_x}{m}\,dt\right)}_{dN}\;\frac{2p_x}{dt}$$

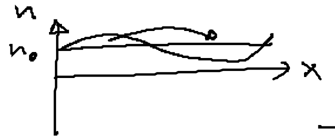
$$\longrightarrow \quad p = \frac{F}{A}\int d^3p\, f(p)\,\frac{p_x^2}{m} \overset{(4.30)}{=} n\, k_B T = \frac{n}{\beta}$$

$$\xrightarrow[n=\frac{N}{V}]{} \quad \boxed{pV = N k_B T, \quad \text{falls } \beta = \frac{1}{k_B T}} \quad (4.31)$$

... Identifikation von T über ideale Gasgleichung!

4.4. Hydrodynamische Bewegungsgleichungen

[Einschub:



]

• Weg ins Gleichgewicht:

(i) Zeitskala der Stöße τ_c

$f_2(\dots) = f_1(\dots)\, f_1(\dots)$ für $|q_1 - q_2| \gg$ Reichweite des WW-Potential

(ii) auf mittlerer stoßfreier Zeit $\tau \gg \tau_c$:

Stoßinvarianten gelten $\xrightarrow[\text{in}]{\text{Relaxation}}$ lokales GG

mit $n(q,t)$, $T(q,t)$

lokale Erwartungswerte

$$\langle A\rangle(q,t) = \int d^3p\, \underbrace{f(q,p,t)}_{\text{lokale Maxwell-verteilung (4.29)}} A(q,p,t)$$

(iii) Dynamik auf Zeit $\tau_H \gg \tau$:

bestimmt durch Strömungsterm in (4.17)

$\xrightarrow[\text{in}]{\text{Relaxation}}$ globales GG

τ_H bestimmt durch Zeitentwicklung von Erhaltungsgröße = hydrodynamische Variable

4.4.1 Erhaltungssätze

- Stoßinvarianten $\longrightarrow$ Erhaltungsgröße (am Ort q)

$\chi^5 = 1 \longrightarrow$ Teilchenzahldichte $n(q,t) = \int d^3p \, 1 f := \langle 1 \rangle$

$\chi^i = p_i \longrightarrow$ Impulsdichte $= m \times$ Teilchenstromdichte $j_i(q,t)$

$$j_i(q,t) \equiv n(q,t) \underbrace{u_i(q,t)}_{\text{mittlere Teilchengeschw.}} = \int d^3p \, \frac{p_i}{m} f = \langle \frac{p_i}{m} \rangle$$

$\chi^4 = \frac{p^2}{2m} \longrightarrow$ Energiedichte:

$$n(q,t)\Big[\underbrace{\frac{m\,u^2(q,t)}{2}}_{\substack{\text{kinetische Energie}\\ \text{der lokalen}\\ \text{konvektiven}\\ \text{Strömung}}} + \underbrace{e(q,t)}_{\substack{\text{innere}\\ \text{Energie pro}\\ \text{Teilchen}\\ = \text{mittlere kinetische}\\ \text{Energie im lokalen}\\ \text{Ruhesystem}}}\Big] = \int d^3p \, \frac{p^2}{2m} f = \langle \frac{p^2}{2m} \rangle$$

mit $n\underline{u} = \langle \frac{\underline{p}}{m} \rangle$

und $n e = \frac{m}{2} \int d^3p \left(\frac{\underline{p}}{m} - \underline{u}\right)^2 f = \langle \frac{m}{2} (\underbrace{\frac{\underline{p}}{m} - \underline{u}}_{\underline{c}})^2 \rangle$ (*) $\quad$ (4.32)

Beweis (*): $\langle \frac{p^2}{2m} \rangle = \frac{m}{2} \langle (\frac{\underline{p}}{m} - \underline{u} + \underline{u})^2 \rangle$

$$= \underset{\langle 1 \rangle}{n} \frac{m}{2} u^2 + \underbrace{\frac{m}{2} \langle (\frac{\underline{p}}{m} - \underline{u})^2 \rangle}_{n e} + 2 \frac{m}{2} \underline{u} \underbrace{\langle \frac{\underline{p}}{m} - \underline{u} \rangle}_{=0}$$

- Bilanzgleichungen für Erhaltungsgrößen:

allgemein: $\int d^3p$ Boltzmann Gl. (4.17) $\times \chi^\alpha$

[N.B. $\int d^3p \left.\frac{df}{dt}\right|_{\text{Stoß}} \chi^\alpha \overset{!}{=} 0$

(i) $\chi^\alpha =$ Stoßinvariante

bzw. (ii) expliziter Beweis für H-Theorem: statt $1 + \ln f$ jetzt χ^α]

$$\longrightarrow \int d^3p \, \chi^\alpha \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m} \underline{p} \cdot \underline{\nabla}_q + \underline{F} \cdot \underline{\nabla}_p\right] f(q,p,t) = 0$$

$$\underline{F} \cdot \underline{\nabla}_p \text{-Term}: \quad = \underline{F} \cdot \left[\underbrace{\underline{\nabla}_p (\chi^\alpha f)}_{\hookrightarrow \text{ Oberflächenterm } = 0} - f \, \underline{\nabla}_p \chi^\alpha\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}\chi^\alpha = 0 = \frac{\partial}{\partial q}\chi^\alpha} \int d^3p \left[\frac{\partial}{\partial t}(\chi^\alpha f) + \frac{1}{m} \underline{p} \cdot \underline{\nabla}_q (\chi^\alpha f) - f \, \underline{F} \cdot \underline{\nabla}_p \chi^\alpha\right] = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \langle \chi^\alpha \rangle + \underline{\nabla}_q \cdot \frac{1}{m} \langle \underline{p} \, \chi^\alpha \rangle = \underline{F} \cdot \langle \underline{\nabla}_p \chi^\alpha \rangle} \quad (4.33)$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\,\text{Dichte}}\qquad \underbrace{\text{div (Stromdichte)}}\qquad \underbrace{\text{Quelle / Senke}}$$

... Bilanzgleichung für Dichte $\langle \chi^\alpha \rangle$

<u>Anwendung auf:</u>

(i) <u>Teilchenzahlerhaltung:</u> $\chi^s = 1$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} n + \nabla_q \cdot \underline{j} = 0 \qquad \text{mit } \underline{j} = n\,\underline{u} = \left\langle \frac{\underline{p}}{m} \right\rangle} \qquad (4.34)$$

... Kontinuitätsgleichung

(ii) <u>Impulserhaltung:</u> $\chi^i = p_i \qquad i = 1,2,3 \quad \xrightarrow[(4.33)]{(4.32)}$

$$m \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{j_i}_{\langle p_i \rangle / m} + \frac{1}{m} \nabla_j \underbrace{\langle p_i p_j \rangle} = \underbrace{n F_i} \qquad \text{mit } \nabla_i = (\nabla_q)_i$$

weil $F_j \nabla_{p_j} p_i = \delta_{ij} F_j = F_i$

$$m^2 \langle (\underline{u} + \underline{c})_i (\underline{u} + \underline{c})_j \rangle \underset{\langle c_i \rangle = 0}{=} m^2 n\, u_i u_j + m^2 \langle c_i c_j \rangle$$

$$\longrightarrow \quad \underbrace{m \frac{\partial}{\partial t} j_i}_{\text{Impulsdichte}} + \nabla_j \underbrace{(\underbrace{m n u_i}_{m j_i} u_j - T_{ij})}_{\text{Impulsstromdichte}} = n F_i$$

$m n u_i u_j$ ... konvektiver Anteil = Impulsdichte × Geschw.

$T_{ij} = -m \langle c_i c_j \rangle$ ... Spannungstensor (= − Drucktensor)

$n F_i$ ... Volumenkraftdichte äußerer Kräfte (4.35)