Fortsetzung: Mikroskopisches Modell für Polarisierbarkeit

Ziel: Verbindung der mikroskop. Polarisierbarkeit α mit makroskopisch messbare Größe ε_r.

mikr. $\longrightarrow$ $\underline{P} = \varepsilon_0 \, n \, \alpha \, \underline{E}_a$

n: Atomdichte

$\underline{E}_a$: Lokalfeld am Ort des Atoms

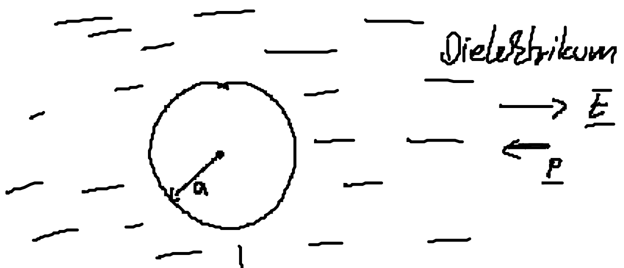
makr. $\longrightarrow$ $\underline{P} = (\varepsilon_r - 1)\, \varepsilon_0 \underline{E} = \chi \, \varepsilon_0 \underline{E}$

$\underline{E}$: äußere Feld

- Falls verdünntes Gas vorliegt (keine WW der Felder der einzelnen pol. Atome)

  $\underline{E}_a = \underline{E} \longrightarrow \underline{\varepsilon_r - 1 = n\alpha}$

- Für Dielektrikum gibt es die WW mit umliegenden Atomen



dielektrische Kugel herausgeschnitten

$$\underline{E} = \underline{E}_a + \underline{E}_{Kugel}$$

wird jetzt berechnet

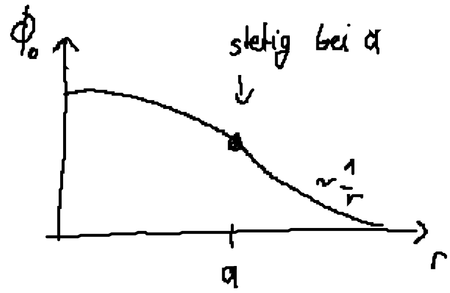
Wir brauchen Feld einer hom. polarisierten Kugel.

<u>Vorarbeit</u>: Feld einer hom. geladenen Kugel

$$\underline{E}_0(\underline{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \begin{cases} \underline{r}/a^3 & r \leq a \\ \underline{r}/r^3 & r \geq a \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad \phi_0(\underline{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \begin{cases} c - \frac{r^2}{2a^3} & r \leq a \\ \frac{1}{r} & r \geq a \end{cases}$$

Bestimmung von der Integrationskonstante c aus Stetigkeitsbedingungen.



$$\lim_{\varepsilon \to 0} \phi_0(a - \varepsilon_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \phi_0(a + \varepsilon_0)$$

$$\longrightarrow \quad c = \frac{3}{2a}$$

<u>Nun</u>: homogen polarisierte Kugel
Überlagerung von 2 entgegengesetzt geladenen Kugeln mit Abstand r_0

wobei $r_0 \rightarrow 0$:

$$\phi(\underline{r}) = \phi_0\left(\underline{r} - \tfrac{1}{2}\underline{r}_0\right) - \phi_0\left(\underline{r} + \tfrac{1}{2}\underline{r}_0\right)$$

$$\overset{\text{Taylor}}{\approx} -\underline{r}_0 \underbrace{\nabla \phi_0(\underline{r})}_{-\underline{E}_0} = \underline{r}_0\, \underline{E}_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \begin{cases} \dfrac{Q\,\underline{r}_0\,\underline{r}}{a^3} & r \leq a \\[2mm] \dfrac{Q\,\underline{r}_0\,\underline{r}}{r^3} & r \geq a \end{cases}$$

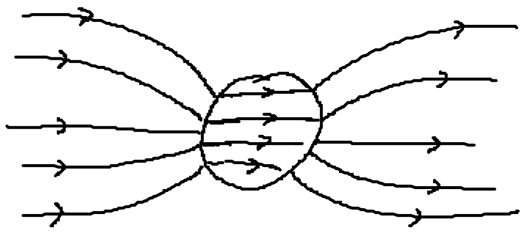
$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \begin{cases} \dfrac{\underline{p}\,\underline{r}}{a^3} & r \leq a \\[2mm] \dfrac{\underline{p}\,\underline{r}}{r^3} & r \geq a \end{cases}$$

$\underline{p} := Q\,\underline{r}_0$

(Dipolmoment der herausgeschnittenen Kugel)

Mit der Polarisation $\underline{P} = \dfrac{\underline{p}}{\frac{4\pi}{3} a^3}$ erhält man

$$\phi(\underline{r}) = \begin{cases} \dfrac{1}{3\varepsilon_0}\, \underline{P}\,\underline{r} & r \leq a \quad \text{homog. Polarisation} \\[2mm] \dfrac{1}{3\varepsilon_0}\, \dfrac{a^3}{r^3}\, \underline{P}\,\underline{r} & r \geq a \quad \text{Dipolpotenzial} \end{cases}$$



$\underline{E}$

Feld einer hom. polarisierten Kugel

$$\underline{E}_{\text{Kugel}} = -\nabla\phi = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\,\underline{P} \qquad r \leq a \quad (\text{Innenfeld})$$

$$\underbrace{\underline{E}_a}_{\text{Lokalfeld}} = \underbrace{\underline{E}}_{\text{makr. Feld}} + \frac{1}{3\varepsilon_0}\underbrace{\underline{P}}_{\text{Innenfeld}} = \underline{E} - \underline{E}_{\text{Kugel}}$$

$\Rightarrow$ Zusammenhang zwischen $\underline{P}$ und makroskop. Feld $\underline{E}$

$$\underline{P} = \varepsilon_0 n \alpha \underline{E}_a = \varepsilon_0 n \alpha \left(\underline{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0} \underline{P} \right)$$

$$\rightarrow \underline{P} = \varepsilon_0 \chi_e \underline{E} \quad \text{mit} \quad \chi_e = \frac{n\alpha}{1 - \frac{1}{3} n\alpha}$$

oder $$n\alpha = \frac{\chi_e}{1 + \frac{1}{3}\chi_e} = \frac{\varepsilon_r - 1}{1 + \frac{\varepsilon_r - 1}{3}} = \boxed{3 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = n\alpha}$$

Formel von Clausius - Mossotti
oder "Lorentz - Lorenz Gleichung"

Hendrik Lorentz (1853 - 1928)
Niederländer

- Lorentz - Trafo
- 1902 Nobelpreis für Zeemann Effekt (zusammen mit Zeeman)

Ludwig Lorenz (1829 - 1891) Däne

- Lorenz Eichung
- Lichtstreuung (Lorenz - Mie)

Edward Lorenz

- Schmetterlings effekt (Lorenz attraktor)

5.6. Wellenausbreitung in Materie

Annahme: homogene, isotrope, lineare Medien
mit skalare Materialparameter ε, μ, σ

$$\underline{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \underline{E} \qquad (\varepsilon_r > 1)$$

$$\underline{B} = \mu_0 \mu_r \underline{H} \qquad (\text{i.a. } \mu \approx 1)$$

$$\underline{j} = \sigma \underline{E} \qquad (\text{Ohm'sches Gesetz})$$

a) Wellen in leitenden Medien <u>ohne</u> Dispersion

(d.h. ε, μ, σ unabhängig von ω)

Sei $\rho = 0$

① $\nabla \times \underline{E} + \dot{\underline{B}} = 0$

② $\nabla \times \underline{B} - \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r \dot{\underline{E}} = \mu_0 \mu_r \underline{j} = \mu_0 \mu_r \sigma \underline{E}$

$$\Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \underline{E}) = \nabla(\underbrace{\nabla \cdot \underline{E}}_{0}) - \Delta \underline{E} \overset{①}{=} -\nabla \times \dot{\underline{B}}$$

$$\overset{②}{=} -\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r \ddot{\underline{E}} - \mu_0 \mu_r \sigma \dot{\underline{E}}$$

$$\boxed{\Delta \underline{E} - \frac{1}{c_M^2}\left(\ddot{\underline{E}} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \dot{\underline{E}}\right) = 0}$$

<u>gedämpfte</u> Wellengleichung mit $c_M = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}$

(1-dim.: Telegraphengleichung, beschreibt Drahtwellenausbreitung)

<u>Harmon. ebene Welle</u> (spezielle Lösung)

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = \underline{E}_0 \, e^{i(\underline{k}\underline{r} - \omega t)}$$

$$\Rightarrow \boxed{k^2 = \varepsilon_r \mu_r \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + i\frac{1}{\omega\tau}\right)}$$

$\tau := \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{\sigma}$

(dielektrische Relaxationszeit)

Dispersionsrelation

$\rightarrow$ Wellenvektor $k \in \mathbb{C}$ (wegen Dämpfung)

Setze: $k = \frac{\omega}{c}\tilde{n} = \frac{\omega}{c}(n + i\varkappa)$

$\tilde{n} = n + i\varkappa$ komplexer Brechungsindex

c Vakuum Lichtgeschwindigkeit

$$\rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(n^2 - \varkappa^2 + \underline{2in\varkappa}\right) \stackrel{!}{=} \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r\mu_r\left(1 + \underline{\frac{i}{\omega\tau}}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} n\varkappa &= \frac{\varepsilon_r\mu_r}{2\omega\tau} \\ n^2 - \varkappa^2 &= \varepsilon_r\mu_r \end{aligned}\right\}$$

2 Gl. zur Bestimmung von $n, \varkappa$ $\rightarrow \boxed{\tilde{n} = n + i\varkappa}$

$\hat{=}$ Dispersionsrelation

$[i(\underline{k}\underline{r} - \omega t)]$ $\hat{=}$

o.B.d.A. $\underline{k} \parallel x_3$: $$\underline{E}(x_3, t) = \underline{E}_0 \underbrace{e^{\left[-\frac{x_3}{d}\right.}}_{\text{Dämpfung}} \underbrace{e^{\left.-i\omega\left(t - \frac{n}{c}x_3\right)\right]}}$$

gedämpfte Welle mit Phasengeschwindigkeit $\frac{c}{n}$

und Extinktionskoeffizienten $d := \frac{c}{\omega\varkappa}$.

Frohe Weihnachten!