3.5. Impulsbilanz (Fortsetzung)

... aus den Maxwellgleichungen folgt:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\underline{D}\times\underline{B})}_{} + \nabla\cdot\left\{\underbrace{\underline{\underline{1}}\,\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \underline{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\underline{B}^2\right) - \varepsilon_0\, \underline{E}\otimes\underline{E} - \frac{1}{\mu_0}\,\underline{B}\otimes\underline{B}}_{}\right\} = \underbrace{-\left(\varrho\,\underline{E} + \underline{j}\times\underline{B}\right)}_{}$$

Impulsstromdichte Tensor $\underline{\underline{T}}$ des Feldes

Impulsdichte des Feldes

$\underline{g} := \underline{D}\times\underline{B}$

$$\left[F = \frac{d}{dt}p\right]$$

Kraftdichte $\underline{f}$ von Feldern auf Ladungen ϱ, Stromdichte $\underline{j} = \varrho\,\underline{v}$ ausgeübt wird

$$\underline{\underline{T}} := \underline{\underline{1}}\,\frac{1}{2}\left(\underline{E}\cdot\underline{D} + \underline{B}\cdot\underline{H}\right) - \underline{E}\otimes\underline{D} - \underline{B}\otimes\underline{H}$$

in Komponenten

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\delta_{\alpha\beta}\left(\underline{E}\cdot\underline{D} + \underline{B}\cdot\underline{H}\right) - E_\alpha D_\beta - B_\alpha H_\beta$$

Stromdichte in α-Richtung der β-Komponente der Impulsdichte

Stromdichte

$\underline{g}$

$$\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{T}} = T_{\alpha\alpha} = \omega \quad (\text{Energiedichte})$$

$\underline{\underline{T}}$ ist symmetrisch: $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} g_\beta + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} T_{\alpha\beta} = -f_\beta}$$

beschreibt Impulsaustausch zwischen Feld und geladenen Teilchen

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\underline{g} + \underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{T}} = -\left(\varrho\,\underline{E} + \underline{j}\times\underline{B}\right)}$$

[Gesamtimpuls ist bei geschl. System aus Feld + Teilchen erhalten, Feldimpuls ist keine Erhaltungsgröße]

Bem.: Eine analoge Bilanzgleichung gilt für die Drehimpulsdichte des Feldes

Bem: Energiestromdichte $\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}$ $\quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

Impulsstromdichte $\underline{g} = \underline{D} \times \underline{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \underline{S}$

3.6. Eichinvarianz

Darstellung der Felder $\underline{E}, \underline{B}$ durch Potenziale $\phi(\underline{r},t)$, $\underline{A}(\underline{r},t)$

$$\underline{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A} \quad , \quad \underline{B} = \nabla \times \underline{A}$$

Frage: allgemeine Transformation $\phi \to \phi'$, $\underline{A} \to \underline{A}'$

die $\underline{E}, \underline{B}$ invariant lässt?

$$\underline{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A} \overset{!}{=} -\nabla\phi' - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}'$$

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A} \overset{!}{=} \nabla \times \underline{A}' \longrightarrow \underline{A}' = \underline{A} + \nabla G(r,t)$$

$(\text{da } \nabla \times \nabla G = 0)$

$$\Rightarrow -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A} \overset{!}{=} -\nabla\phi' - \frac{\partial}{\partial t}(\underline{A} + \nabla G)$$

$$\Rightarrow \nabla\left(\phi' - \phi + \frac{\partial}{\partial t} G\right) = 0$$

$$\Rightarrow \phi' - \phi + \frac{\partial}{\partial t} G = g(t) \quad \text{unabhängig von } \underline{r}\,!$$

Mit $F(\underline{r},t) := G(\underline{r},t) - \int_{t_0}^{t} dt'\, g(t')$

ergibt sich

$$\underline{A}'(\underline{r},t) = \underline{A}(\underline{r},t) + \nabla F(\underline{r},t)$$

$$\phi'(\underline{r},t) = \phi(\underline{r},t) - \frac{\partial}{\partial t} F(\underline{r},t)$$

mit beliebiger Eichfunktion $F(\underline{r},t)$.

Alle physikalischen Aussagen müssen eichinvariant sein!

(Aber nicht nur $\underline{E}$, $\underline{B}$ sondern auch ϕ, $\underline{A}$ sind phys. relevant z.B. Aharonov-Bohm-Effekt)

Durch $\underline{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}$, $\underline{B} = \nabla\times\underline{A}$ sind die

homogenen Maxwell-Gl. bereits erfüllt:

$$\nabla\times\underline{E} = -\underbrace{\nabla\times\nabla\phi}_{0} - \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\nabla\times\underline{A}}_{\underline{B}} \quad \checkmark$$

$$\nabla\cdot\underline{B} = \nabla\cdot(\nabla\times\underline{A}) = 0 \quad \checkmark$$

Die Umkehrung gilt auch

$$\nabla\cdot\underline{B} = 0 \implies \exists\,\underline{A}: \ \underline{B} = \nabla\times\underline{A}$$ (konstruktiver Beweis)

eingesetzt in

$$\nabla\times\underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\underline{B} = -\nabla\times\frac{\partial}{\partial t}\underline{A} \implies \nabla\times\left(\underline{E} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}\right) = 0$$

$$\text{d.h.} \quad \exists\,\phi: \ \underline{E} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{A} = -\nabla\phi$$

■

Wähle nun eine Eichung, so dass die inhomogenen Maxwell-Gl. besonders einfach werden:

Ziel: Entkopplung der DGL n für $\underline{A}$ und ϕ

(i) Lorentz-Eichung

$$\boxed{\nabla \cdot \underline{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \phi = 0} \quad (*)$$

dann gilt:

a) $$-\nabla \cdot \underline{E} = \nabla\left(\nabla \phi + \frac{\partial}{\partial t} A\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

$$\Delta \phi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \underline{A} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

$$\overset{(*)}{\longrightarrow} \boxed{\Delta \phi - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho}$$

$$\boxed{\Box \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho}$$

Wellengleichung

d'Alembert Operator

$$\Box := \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

b) $$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \underline{B} - \varepsilon_0 \dot{\underline{E}} = \underline{j}$$

$$\underbrace{\nabla \times (\nabla \times A)}_{\nabla(\nabla \underline{A}) - \Delta \underline{A}} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \phi + \frac{\partial}{\partial t} A\right) = \mu_0 \underline{j}$$

$$\Delta \underline{A} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{A} - \nabla \underbrace{\left(\nabla\cdot\underline{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\phi\right)}_{0 \text{ für Lorentz-Eichung}} = -\mu_0 \underline{j}$$

$$\boxed{\Box \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}}$$

$$\boxed{\Box \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho}$$

inhomogene Wellengleichung (entkoppelt!)

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 2.994 \times 10^8 \frac{m}{s}$$

Lichtgeschwindigkeit (Ausbreitungsgeschw. el./magn. Wellen im Vakuum)

(ii) Coulomb-Eichung (Strahlungseichung)

$$\boxed{\nabla\cdot\underline{A} = 0}$$

Allgemein gilt: Zerlegung von $\underline{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}$

in Longitudinalfeld $\underline{E}_l := -\nabla\phi$ (wirbelfrei)

und Transversalfeld $\underline{E}_t := \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}$ (quellfrei)

tatsächlich gilt: $\nabla\times\underline{E}_l = 0$

$\nabla\cdot\underline{E}_t = 0$

$\underline{B}$ ist immer transresal: $\nabla\cdot\underline{B} = \nabla(\nabla\times\underline{A}) = 0$

Also: ϕ ergibt die longitudinalen

$\underline{A}$ die transversalen Felder

Zerlegung der Stromdichte $\underline{j} = \underline{j}_\ell + \underline{j}_t$

mit $\underline{\nabla} \times \underline{j}_\ell = 0$

$\nabla \cdot \underline{j}_t = 0$

mit $\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\varrho}_{\varepsilon_0 \nabla \underline{E}_\ell} + \nabla(\underline{j}_\ell + \underbrace{\underline{j}_t}_{\nabla \underline{j}_t = 0}) = 0$ folgt:

$$\nabla \cdot \left(\underline{j}_\ell + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\underline{E}_\ell\right) = 0$$

Außerdem ist $\nabla \times \left(\underline{j}_\ell + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\underline{E}_\ell\right) = 0$

$\Rightarrow \quad \underline{j}_\ell + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\underline{E}_\ell = \text{const.} = 0$ damit für $r \to \infty$ verschwindet

$$\Rightarrow \quad \underline{j}_\ell = \varepsilon_0 \nabla \frac{\partial}{\partial t}\phi$$

Die Feldgl. (I) liefern: $\Delta\phi + \frac{\partial}{\partial t}\overbrace{\nabla \cdot \underline{A}}^{0} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho$ $\left[\operatorname{div} E = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho\right.$

(II) $\Delta \underline{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{A} - \nabla\underbrace{(\nabla \cdot \underline{A})}_{0} - \underbrace{\varepsilon_0\mu_0 \nabla \frac{\partial}{\partial t}\phi}_{\mu_0 \underline{j}_\ell} = -\mu_0 \underline{j}$

$\Rightarrow$ (I) $\boxed{\Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho}$ $\Rightarrow$ longitudinale Felder $\hat{=}$ Elektrostatik

(II) $\boxed{\Box \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}_t}$ $\Rightarrow$ transversale Felder $\hat{=}$ el. magn. Wellen

Die Coulomb – Eichung ist zweckmäßig bei Strahlungsprobleme!