

# Relativistische Mechanik

Newton-Mechanik nicht Lorentz-invariant

Jetzt: Lorentz-invariant mit Hilfe von Vierervektoren und Skalaren ( $\hat{=}$  Invarianten)

$\rightarrow$  Grenzfall  $v \ll c$ : Newton-Mechanik

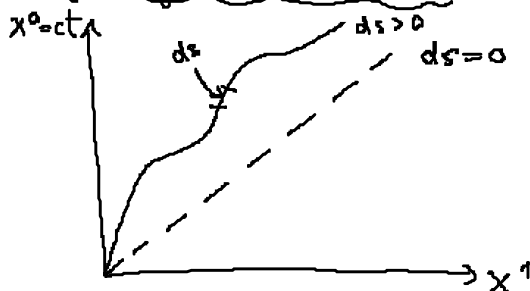
$I = I(t)$ : Klass. Bahn

$\Rightarrow$  Vierervektoren  $x^M(t)$ : Parametrisierung der Weltlinie  
( $ct, x, y, z$ ) durch  $t$  ungeeignet, da sich  $t$  bei Lorentz-Transform ~~ändert~~ ändert.

Definition: Eigenzeit  $\tau \hat{=}$  Zeit im momentanes Ruhesystem  
(Teilchen mit einem mitgeführten Uhr)

$\Rightarrow x^M(\tau)$

Bogenlänge der Weltlinie:



$$\begin{aligned} ds &= (dx^M dx_M)^{1/2} = [c^2 dt^2 - (dx)^2]^{1/2} \\ &= c [1 - (\frac{1}{c} \frac{dx}{dt})^2]^{1/2} dt \\ &= c (1 - \beta^2)^{1/2} dt \\ &= c \frac{dt}{\gamma} \quad ; \quad \beta = \frac{v}{c} = \frac{1}{c} \left| \frac{dx}{dt} \right| \\ &= c d\tau \\ \Rightarrow \tau &= \frac{s}{c} \end{aligned}$$

Lorentz-Transform für  $dx = 0$ :

$d\tau = dt' = \frac{dt}{\gamma}$  (momentanes Ruhesystem)

Definition: Vierergeschwindigkeit

$$u^M := \frac{dx^M}{ds} = \frac{1}{c} \frac{dx^M}{d\tau}$$

dimensionslos!

$u^M u_M = \frac{dx^M dx_M}{(ds)^2} = \frac{(ds)^2}{(ds)^2} = 1 \Rightarrow$  Lorentz-invariant (da skalar)

Komponenten:  $u^M = \frac{1}{c} \frac{dx^M}{d\tau}$

$$\left. \begin{aligned} u^0 &= \gamma \\ u^i &= \frac{\gamma}{c} v^i = \frac{1}{c} \frac{dx^i}{d\tau} \quad i=1,2,3 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow 1 \\ \rightarrow \frac{1}{c} v^i \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{nicht relativist.} \\ \text{Grenzfall} \\ \gamma \rightarrow 1 \end{array} \right.$$

Definition: Viererimpuls

$$p^M := m_0 c u^M = m_0 \frac{dx^M}{d\tau}$$

$m_0$ : Ruhemasse

$$p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2 \underbrace{u^\mu u_\mu}_{=1} = m_0^2 c^2 \Rightarrow \text{Lorentz-invariant}$$

$$p^0 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = m(v) c = p_0$$

$$p^i = \frac{m_0 v^i}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = m(v) v^i = -p_i$$

$$\rightarrow m_0 c$$

$$\beta \ll 1$$

$$\rightarrow m_0 v^i$$

Es gilt:

$$\frac{p^i}{p^0} = \frac{u^i}{u^0} = \frac{\frac{v^i}{c}}{\gamma} = \frac{v^i}{c}$$

\*

(Zusammenhang 4er-Impuls - 4er-Geschw.)

Physikalische Bedeutung von  $p^0$ :

Zunächst Verallgemeinerung der Newton'schen Grundgleichung:

$$\underline{F} = \frac{d}{dt} \underline{p} \quad (\text{nicht Lorentz-invariant!})$$

Definition: Viererkraft (Minkowski-Kraft)

$$\underline{f}^\mu := \frac{d}{d\tau} p^\mu = m_0 c \frac{du^\mu}{d\tau} = m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$$

Leistungsbilanz:

$$u^\mu u_\mu = 1 \Rightarrow 0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{d\tau} (u^\mu u_\mu) = 2 \frac{du^\mu}{d\tau} u_\mu$$

$$\Rightarrow \underline{f}^\mu u_\mu \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \gamma \frac{d}{dt} p^0 + \frac{\gamma}{c} \sum_{i=1}^3 f^i v_i = \frac{\gamma}{c} \left[ \frac{d}{dt} (c p^0) - \underline{f} \cdot \underline{v} \right] = 0$$

$\frac{d}{dt} (c p^0) \stackrel{!}{=} \text{Änderung der Energie}$

Definition: relativist. Energie

$$E := c p^0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = m(v) c^2$$

$$\Rightarrow \boxed{p^0 = \frac{E}{c}}$$

$$\text{und } \underline{f}^0 = \frac{1}{c} \underline{f} \cdot \underline{v} \rightarrow \text{Leistung}$$

Relativistische Energie-Impuls-Beziehung:

$$p^M p_M = (m_0 c)^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 p^2} \Leftrightarrow E = \sqrt{c^2 p^2 + (m_0 c)^2}$$

nichtrelativist. Grenzfall:  $|p| \ll m_0 c$

$$E = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}} \approx m_0 c^2 \left( 1 + \frac{p^2}{2 m_0^2 c^2} + \dots \right)$$

$$\approx m_0 c^2 + \frac{p^2}{2 m_0} + \dots$$

Ruhe-  
energie      Kinet.  
Energie

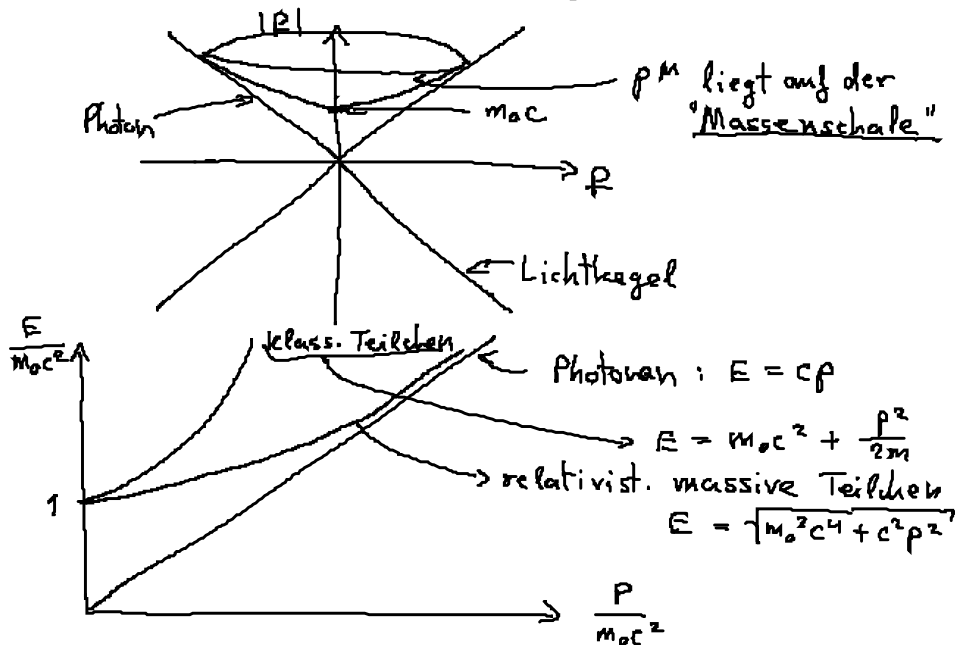
$$p = 0 : \boxed{E = m_0 c^2}$$

Äquivalenz von Ruhemasse  
und Energie!

hochrelativist. Grenzfall:  $m_0 = 0$  (z.B. Photon)

$$\Rightarrow E = c |p| \Rightarrow p^M = (|p|, \mathbf{p}) \text{ mit } p^M p_M = 0 \text{ (Richtartiger Vektor)}$$

$v = c \Rightarrow u^M$  nicht mehr definiert, da  $\gamma \rightarrow \infty$



Bemerkung:

Welle-Teilchen-Dualismus der Quantentheorie

Photon:  $E = cp$

Lichtwelle:  $E = \hbar \omega$

$\omega$ : Kreisfrequenz

$\hbar$ : Plancksches  
Wirbelungsquantum



De-Broglie-Beziehung

$$p = \hbar k$$

$$\omega = ck$$

$k$ : Wellenzahl