

3. Schrödingergleichung f. Teilchen im freien Raum

3.1. Formulierung

1926 E. Schrödinger

Teilchen soll mit Wellenfunktion beschrieben werden $\psi(\vec{r}, t)$

Annahmen im Einklang mit Beobachtung:

a) Interferenz von Elektronenwellen, also Superpositionsprinzip

wenn ψ_1 und ψ_2 Lösungen sind $\rightarrow \psi_1 + \psi_2$ soll auch Lösung sein

also: $\psi = \psi_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$, \vec{k} - Wellenvektor

b) möglichst einfach \rightarrow aus Anfangsverteilung $\psi(\vec{r}, 0)$ soll lösg. bestimmt

Dgl. 1. Ordnung in Zeit für $\psi(\vec{r}, t)$

c) de Broglie Beziehungen sollen gelten:

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}, E = \frac{p^2}{2m} = \hbar \omega \rightarrow \psi(\vec{r}, t) = \psi_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \psi_0 e^{i\left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar} - \frac{E}{\hbar} t\right)}$$

$$i) \frac{\partial}{\partial t} \psi = \psi_0 e^{i\left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar} - \frac{E}{\hbar} t\right)} \cdot \left(-\frac{i}{\hbar} E\right) = -\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} \psi$$

$$ii) \vec{\nabla}_r^2 \psi = \Delta \psi = -\frac{1}{\hbar^2} p^2 \psi$$

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$$

$$\text{aus i) } \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} \psi, \quad \text{aus ii) } \Delta \psi = -\frac{1}{\hbar^2} p^2 \psi$$

$$\boxed{i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} \psi(\vec{r}, t)}$$

Schrödingergl. f. freie
Teilchen, partielle Dgl.

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$$

$\psi(\vec{r}, t)$: komplexwertig

3.2. Zur Interpretation der Schrödingergleichung

- Wo ist das Teilchen, was bedeutet $\psi(\vec{r}, t)$

a) Max Born, 1926: Wahrscheinlichkeitsinterpretation -

$|\psi(\vec{r}, t)|^2$ ist Maß f. die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte
des beschriebenen Objekts

→ $|\psi(\vec{r}, t)|^2 dV$ definiert Wahrscheinlichkeit das Teilchen im Volumen dV
zur Zeit t zu finden:
↑
Volumenelement



→ Normierung d. Wahrscheinlichkeit: $\int_{\text{ganzer Raum}} dV |\psi(\vec{r}, t)|^2 = 1$

→ Wahrscheinlichkeit w_0 in V_0 : $\int_{V_0} dV |\psi(\vec{r}, t)|^2 = w_0$

Born: Jedem wir beschränkt das Detektivwissen im atomaren Bereich aufzugeben

b) Stütze der Wahrscheinlichkeitsinterpretation

i/ Kontinuitätsgleichung:

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{\psi} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \psi & | \psi^* \\ -i\hbar \dot{\psi}^* &= -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \psi^* & | \psi \end{aligned}$$

D: ffz der fließenden Wellen

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} (\psi^* \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \psi - \text{c.c.})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 = -\vec{\nabla} \cdot \left(\psi^* \frac{1}{2m} \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \psi + \text{c.c.} \right)$$

$\rho(\vec{r}, t)$

$\vec{j}(\vec{r}, t)$

Wahrscheinlichkeitsdichte

Wahrscheinlichkeitsstrom

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

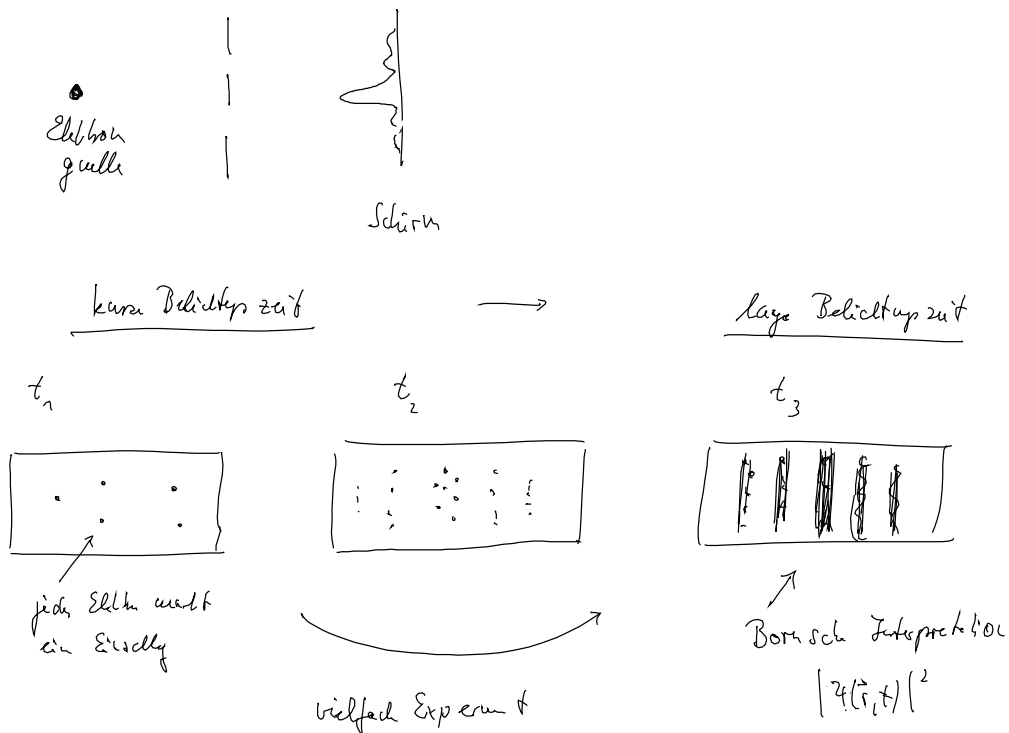


Kontinuitätsgl. f. Wahrscheinlichkeitsdichte

ii) Bezug zum Experiment:

Analyse von Interferenzmustern auf Photoplatte

Doppelspaltexperiment zu verschied. Belichtungszeiten:



Kopenhagener Deutung (1927 Bohr, Heisenberg)

- 1) Die Wellenfunktion gibt die vollständigste mögl. Festlegung d. Quantenzustands wieder.
- 2) Die Übertragung eines einzelnen Quanten auf Messapparatur ist unkontrollierbar und nicht analysierbar
- 3) Prinzipiell sind nur Wahrscheinlichkeitsaussagen über den Ausgang vieler Experimente möglich.