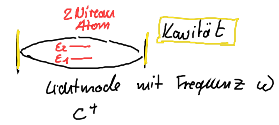


6.4.5. Atom in einer Kavität

Jaynes Cummings Hamiltonian

$$\hat{\mathcal{H}}_{JC} = \underbrace{\hbar\omega\hat{c}^\dagger\hat{c} + \frac{1}{2}\hbar\omega_{12}\hat{\sigma}_z}_{\mathcal{H}_0} + \underbrace{\hbar g(\hat{\sigma}_+\hat{c} + \hat{c}^\dagger\hat{\sigma}_-)}_{\mathcal{H}_W}$$



Eigenwerte

$$E_n^\pm = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} + \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \pm \frac{\hbar}{2} \sqrt{\Delta^2 + (2g)^2(n+1)}$$

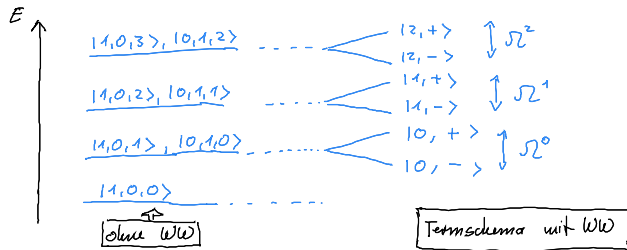
n - Photon Rabi-Frequenz Ω^2

↑ Detuning $\Delta = \omega_{12} - \omega$

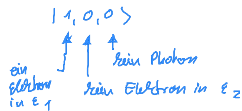
"dressed states"

- Eigenwerte durch WW verschoben

Eigenzustände für $\Delta = 0$:

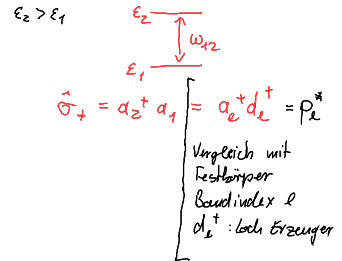


Zustände von \mathcal{H}_0 :



"optischer Stark Effekt"

Atom Eigenzustände



$$\hat{\sigma}_- = a_1^\dagger a_2 = p_L$$

$\langle \hat{\sigma}_z \rangle$: Inversion

Dynamische Entwicklung:

Lösungsmöglichkeiten

1) Zeitentwicklung im Heisenberg-Bild

$$\dot{\hat{c}} = \frac{i}{\hbar} [\hat{\mathcal{H}}_{JC}, \hat{c}]$$

• Vorteil: direkter Zugang zur Inversion $\langle \hat{\sigma}_z \rangle = D(t)$

• zu Korrelationsfunktionen

$$G^{(2)}(\tau) = \langle \hat{c}^\dagger(t) \hat{c}^\dagger(t+\tau) \hat{c}(t) \hat{c}(t+\tau) \rangle$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{c}} = -i\omega\hat{c} - ig\hat{\sigma}_- \\ \dot{\hat{\sigma}}_- = -i\omega_{12}\hat{\sigma}_- + ig\hat{\sigma}_z\hat{c} \\ \dot{\hat{\sigma}}_z = 2ig(\hat{c}^\dagger\hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_+\hat{c}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{c} \text{ und } \hat{\sigma} \text{ vertauschen} \\ [\hat{\sigma}_-, \hat{\sigma}_+] = -\hat{\sigma}_z \\ [\hat{\sigma}_-, \hat{\sigma}_z] = 2\hat{\sigma}_- \end{cases}$$

• Vergleichbare Bloch-Gleichungen aus 6.3

(Zusätzlich gibt es eine Gleichung für Feldoperatoren)

Inversion koppelt an Polarisatoren

Polarisation koppelt an Feld + Inversion

Lösung des DGL-Systems liefert

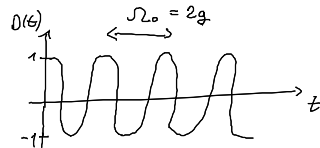
$$D(t) = \langle \hat{G}_z(t) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} S_{nn}(0) \left(\frac{\Delta^2}{\Omega_n^2} + \frac{4g^2(n+1)}{\Omega_n^2} \cos(\Omega_n t) \right)$$

Erwartungswert im Anfangszustand \hat{S}
 keine Dynamik nur Heisenbergbild
 Anfangsbedingung für Photonen in der Mode "Quantenzustand des Lichtes" bei $t=0$
 n-Photonen Rabi-Frequenz $\Omega_n^2 = \Delta^2 + 4g^2(n+1)$

1) WW mit Vakuum (leere Kavität, d.h. $n=0$)

$$S_{nn}(0) = \delta_{n0}$$

[falls $\Delta=0$ (resonant)] \rightarrow
 $\omega_2 = \omega = 0$



$$D(t) = \frac{1}{4g^2} 4g^2 \cos(2gt)$$

Atom oszilliert auch ohne treibendes Feld (im Kontakt mit Vakuum)

↪ zur klass. Theorie

Bemerkung: Vakuum besteht nicht nur aus einer Mode

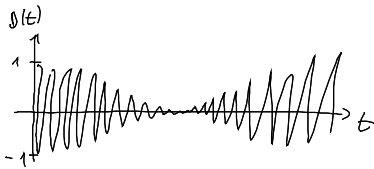
→ \mathcal{H}_{qc} erweitern auf viele Moden

→ liefert Zerfall des Atoms (exp. Abfall von $D(t)$)

2) WW mit kohärentem Zustand

$$S_{nn}(0) = \frac{\langle n \rangle^n e^{-\langle n \rangle}}{n!}$$

(Glauber Zustand)



Collapse + Revival

• treten nur auf solange diskrete Verteilung der Photonen spürbar

klass. Grenzfall $n \rightarrow \infty$

→ Gauß-Verteilung

→ exp. Abfall für Inversen

2) Dichtematrix formalismus im WW-Bild zur Beschreibung der Dynamik

• Zeitentwicklung bzgl. \mathcal{H}_0 steckt in den Zuständen (in der Dichtematrix)

- reduzierte Dichtematrix

$$\hat{S}^{ph} = \text{tr}_{\text{Atom}} \hat{S}$$

≙ liefert Dichtematrix des Feldes

" "

$$\hat{S}^A = \text{tr}_{\text{Feld}} \hat{S}$$

≙ liefert Dichtematrix des Atoms

$$i\hbar \dot{\hat{S}}^w = [\mathcal{H}_w^w, \hat{S}^w]$$

$$\mathcal{H}_w^w = e^{i\mathcal{H}_0 t} \mathcal{H}_w e^{-i\mathcal{H}_0 t}$$

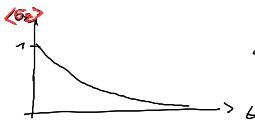
- formelles Integrieren + iteratives Einsetzen + Abbruch nach z.B. 2. Ordnung (Störungstheorie)

- schwache Kopplung
- Markov - Annahme

→ Master Gleichung
DGL 1. Ordnung für $\hat{\rho}^A$

→ liefert Inversion des Atoms als Funktion der Zeit

- WW mit hominischem Photorezeptor (Vakuum)



$$\langle \sigma_z \rangle = \text{tr} \hat{\rho}^A(t) \hat{\sigma}_z = 2 e^{-\omega t} - 1$$

[Atom]
leere Kavität der Temperatur T

ω : Lebensdauer des Atoms

- Rückkehr ins Heisenbergbild → Korrelationsfunktion ^{des Atoms} bestimmbar

$$g^{(1)}(\tau) = e^{-\omega/2 \tau}$$

$$g^{(2)}(\tau) = 1 - e^{-\omega \tau} = \frac{\langle \sigma^+ \sigma_z^+ \sigma^- \sigma_z^- \rangle}{\langle \sigma^+ \sigma^- \rangle^2}$$

$g^{(2)}(\tau) = 0$: Atom kann nicht sofort wieder ein zweites Photon emittieren

(anti-Sonndring)

Ende

Zusammenfassung

1. Kristalle

- Fourierreuewidlung
- Festkörper mit Periodizitäten

2. Quantenmechanische Beschreibung des Festkörpers

Schrödinger Gl. für Vielteilchensystem

Born-Oppenheimer Näherung

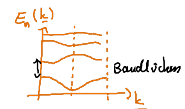
3. Gittergleichung

- Phononen (akust., opt.)
- Harmon. Eigenschwingung
- Langwelliger Grenzfall (Elastostatik) (Phononen - Polaritonen)



4. Elektronenzustände

- Bloch Zustände (Kristallelektronen)
- Näherungen
 - fast freie Elektronen
 - Tight-binding Näherung
 - Hartree-Fock Näherung



5. Zweite Quantisierung

- Ein- und 2-Teilchen Hamiltonians, Erwartungswerte, Feldoperatoren für Wellenfkt.
- Modelle für Festkörperhamiltonian (ohne Phononen uW)
 - freie Elektronengas
 - Hubbard Modell (nur nächste Nachbarn)
 - Jellium Modell (pos. Ladungs-Hintergrund)
- WW Löcher + Elektronen \rightarrow Exzitonen

6. Dynamische Effekte

- El.-Phonon WW (Polaron)
 - attraktive e-e-WW (Supraleitung)
- Licht - Materie WW
 - semi-klass. \rightarrow Bloch Gleichungen
 - voll quanten-statistisch (Feldoperatoren für E-Feld)
 - Korrelationsfunktionen
 - Jaynes Cummings Hamiltonian