

Wdh. Quantenzustände des Lichtes

- 1n) Fock Zustände - feste Teilchenzahl, unbekannte Phase  $\langle E \rangle = 0$   
 $\langle E^2 \rangle = \langle \Delta E \rangle^2 = \epsilon^2(2n_0 + 1)$
- 1a) Glauber Zustände - rel. Schwankung verschwindet für große  $\alpha$   $\langle E \rangle \hat{=} \text{Amplitude des klass. E-Feldes}$
- $\hat{S}_H$  thermisches Gemisch -  $\langle E \rangle = \text{tr}(\rho E)$   
 $\langle E^2 \rangle = \epsilon^2(2\langle n \rangle + 1)$   
 $\langle n \rangle = \langle c^\dagger c \rangle_H$

6.4.3. Photonenkorrelationen

► Korrelationen 1. Ordnung des Feldes

$$G^{(1)}(r_1, r_2, t_1, t_2) = \langle E^{(-)}(r_1, t_1) E^{(+)}(r_2, t_2) \rangle \quad t_1 - t_2 = \bar{\tau}$$

$$= G^{(1)}(r_1, r_2, \bar{\tau}) = \langle E^{(-)}(r_1, t) E^{(+)}(r_2, t + \bar{\tau}) \rangle$$

Bem: Photendetektion geschieht über Absorption eines Photons  $\rightarrow$  nur Vermittler vom  $\hat{E}$  tragen  
 bei  $E^{(+)}(r, t) = \sum_{\lambda} E_{\lambda} \hat{c}_{\lambda}$   
 $\sim e^{i\omega t}$

$$\omega_1(r, t) = G^{(1)}(r, r, 0)$$

$\rightarrow$  Wahrscheinlichkeit ein Photon zu detektieren

$$\omega_1(r, t) = \text{tr}(\hat{\rho} E^{(-)} E^{(+)})$$

$\uparrow$   
 $\hat{c}^\dagger \hat{c}$

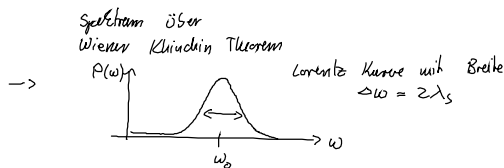
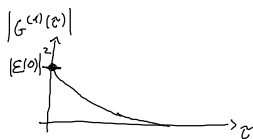
• thermisches Ensemble

$$G^{(1)}(\bar{\tau}) = |E(\omega)|^2 e^{-\lambda_S \bar{\tau}} e^{-i\omega_0 \bar{\tau}}$$

ebene Welle (kohärenter Zustand)

durch Varianz der Phase

• klassisch aus Breite der spektralen Leistungsdichte  $P(\omega)$  bestimmbar

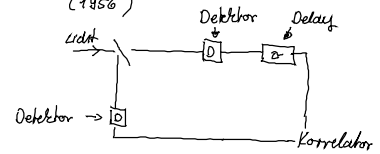


► Korrelationsfunktion 2. Ordnung des Feldes

$$G^{(2)}(r_1, r_2, r_3, r_4, t_1, t_2, t_3, t_4) = \langle E^{(-)}(r_1, t_1) E^{(-)}(r_2, t_2) E^{(+)}(r_3, t_3) E^{(+)}(r_4, t_4) \rangle$$

"Detektion von 2 Photonen"

Messung z.B. mit Hanbury Brown Twiss Setup (1956)



Bemerkung:  $G^{(2)}(\tau) \neq \langle I(t)I(t+\tau) \rangle$

$$\langle I \rangle = \langle E^{(-)} E^{(+)} \rangle$$

Operatoren vertauschen nicht!  
nur im klass. Grenzfall vieler Photonen

normierte Korrelationsfunktion mit  $r_1 = r_2$  & einmodigem Feld

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \hat{c}^\dagger(t) \hat{c}^\dagger(t+\tau) \hat{c}(t+\tau) \hat{c}(t) \rangle}{\langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle^2}$$

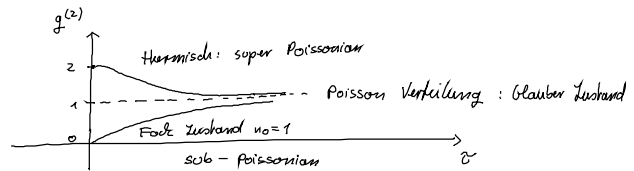
$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \hat{c}^\dagger(t) \hat{c}^\dagger(t+\tau) \hat{c}(t+\tau) \hat{c}(t) \rangle}{\langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle^2}$$

Bedeutung von  $g^{(2)}(\tau)$ : kann zur Bestimmung der Photonstatistik, d.h. Quantenzustand des Lichtes  $g^{(2)}$  ist Wahrscheinlichkeit 2 Photonen mit Zeitdifferenz  $\tau$  zu detektieren

$$g^{(2)}(0)^{\text{Herm}} = 2 \quad \text{"bunched"}$$

$$g^{(2)}(0)^{\text{koh.}} = 1$$

$$g^{(2)}(0)^{\text{Fock}} = 1 - \frac{1}{n_0} \quad \text{"anti-bunched"}$$



#### 6.4.4. Elektronen in WD mit quantisiertem Lichtfeld

für klass. Feld hatten wir

$$\hat{H}_{\text{opt}} = \frac{1}{V} \sum_{\substack{\mathbf{k}, \mathbf{q} \\ \mu, \mu'}} \mathbf{E}(\mathbf{q}, t) \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{n}, \mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger \mathbf{a}_{\mu, \mathbf{k}} \mu_{\mu\mu'}(\mathbf{k}, \mathbf{q})$$

$\uparrow$  Erzeuger eines Elektrons im Festkörper       $\uparrow$  statisches Dipolmoment

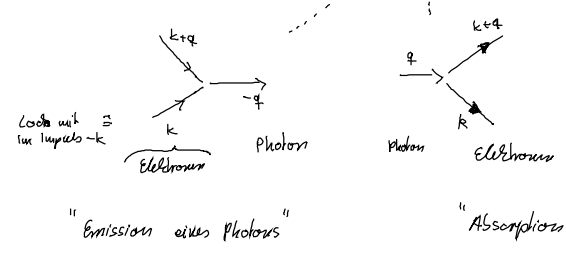
mit quantisiertem Feldoperator:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{q}, t) = \sum_{\mathbf{q}} i\omega_{\mathbf{q}} \tilde{A}^{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) \left[ \hat{c}_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} - \hat{c}_{\mathbf{q}}^\dagger e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \right]$$

$$E(\mathbf{q}, \epsilon) \sim (\hat{c}_{\mathbf{q}} + \hat{c}_{-\mathbf{q}}^{\dagger})$$

Photon mit Frequenz  $\omega_{\lambda}$  entspricht  $\hbar\omega_{\lambda} = \frac{c}{\omega_{\lambda}}$

$$\hat{H}_{\text{opt}} = \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{n}'} \underbrace{g_{\mathbf{k}\mathbf{n}, \mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{n}'}}_{\text{Kopplungskonstante}} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{n}'}^{\dagger} d_{\mathbf{k}, \mathbf{n}} (\hat{c}_{\mathbf{q}} + \hat{c}_{-\mathbf{q}}^{\dagger})$$



$a^{\dagger}$  : Fermion - Erzeuger  
 $c^{\dagger}$  : Bosonum - Erzeuger

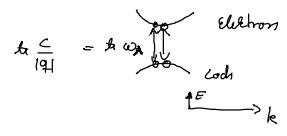
d.h. es liegt eine lineare Kopplung beider (vertauschender) Operatoren. Struktur ist identisch mit Elektron-Photon Wd

Folgerung:

① Das Exziton-Polariton

- Bei Halbleiter nahe der Bandkante wird durch  $\hat{H}_{\text{opt}}$  ein Elektron-Loch Paar erzeugt
- Formal kann ich den Exziton Erzeuger definieren

$$B_{\mathbf{q}}^{\dagger} = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{n}} \underbrace{a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{\dagger}}_{\text{LB}} \underbrace{a_{\mathbf{k}, \mathbf{n}}}_{\text{VB}}$$



$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{opt}}$$

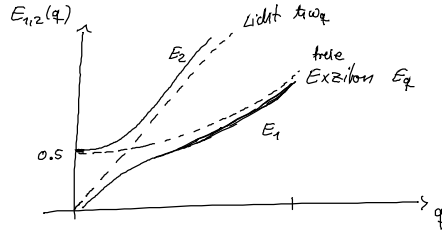
$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{q}} (E_{\mathbf{q}} B_{\mathbf{q}}^{\dagger} B_{\mathbf{q}} + \hbar\omega_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}}^{\dagger} c_{\mathbf{q}} + \hbar g_{\mathbf{q}} (\hat{c}_{\mathbf{q}} B_{\mathbf{q}}^{\dagger} + \hat{c}_{-\mathbf{q}}^{\dagger} B_{\mathbf{q}}))$$

$E_{\mathbf{q}}$  : Eigenenergie des Exzitons  
 $E_{\mathbf{q}} = \Delta - E_B + \frac{\hbar^2 q^2}{2(m_e + m_h)}$   
 ↑ Exziton Bindungsenergie  
 Bandkanten diff.

• lässt sich leicht diagonalisieren durch neue Quasiteilchen mit Eigenenergie

$$E_{q,2}(q) = \frac{E_q + \hbar\omega_q}{2} \pm \sqrt{(\hbar\omega_q - E_q)^2 + 4g_q^2}$$

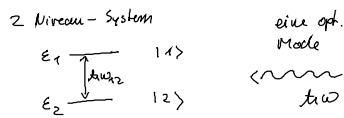
Exziton-Polariton



[ vgl. Phonon-Polariton aus Phononen + Photonen (3.7.) und Übung 5 ]

## ② Jaynes Cummings Hamiltonian

aus dem allgemeinen Hamiltonian  $\otimes$  kann im einfachsten Fall von: einer Mode  $\hat{c}^\dagger$  zwei elektron. Zuständen  $\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2^\dagger$



$$\hat{H}_{JC} = \underbrace{E_1 a_1^\dagger a_1 + E_2 a_2^\dagger a_2 + \hbar\omega c^\dagger c}_{\hat{H}_0} + g(c + c^\dagger) a_1^\dagger a_2 + g^*(c + c^\dagger) a_2^\dagger a_1$$

Umschreiben auf Eigenzustände des Atoms mit Spin-Matrizen

$$= \frac{\hbar\omega_{12}}{2} \hat{\sigma}_z + \frac{E_1 + E_2}{2} \mathbb{1} + \hbar\omega c^\dagger c + g(\hat{c} + \hat{c}^\dagger) \hat{\sigma}_- + g^*(\hat{c} + \hat{c}^\dagger) \hat{\sigma}_+$$

mit  $\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = |1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|$

Hebeoperator:  $\hat{\sigma}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = |1\rangle\langle 2|$

Vernichteoperator:  $\hat{\sigma}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = |2\rangle\langle 1|$

$\hat{H}_{JC}$  enthält

$$g \hat{\sigma}_{+c} + \underbrace{\hat{\sigma}_{+c}^{\dagger} + \hat{\sigma}_{-c}}_{\text{nicht energieerhaltend}} + \hat{\sigma}_{-c}^{\dagger}$$

Photon  
verschiebt und  
Atom anregt  
= Energieerhaltung

- nicht energieerhaltend  
- "Aben nur kurz"  
Energie-Zeit Unschärfe

Photon erzeugt  
und Atom abregt

wirden vernachlässigt  
≡ (RWA) rotating wave approximation

Vorstellung im WW-Bild

$$\hat{V}_w = e^{i\frac{\omega_0}{\hbar}t} \hat{H}_{opt} e^{-i\frac{\omega_0}{\hbar}t}$$

$$\hat{c}^\dagger w = e^{i\omega c^\dagger t} \hat{c}^\dagger e^{-i\omega c^\dagger t} = \hat{c}^\dagger e^{-i\omega t}$$

$$\hat{\sigma}_w = e^{i\frac{\omega_A}{\hbar} \hat{\sigma}_z t} \hat{\sigma}_+ e^{-i\frac{\omega_A}{\hbar} \hat{\sigma}_z t} = \hat{\sigma}_+ e^{i\omega_A t}$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}_{+c}^{\dagger} \sim e^{i(\omega_A + \omega)t} \rightarrow \text{sehr schnelle Oszillation}$$

$$\hat{\sigma}_{+c} \sim e^{i(\omega_A - \omega)t} \quad \text{langsam falls } \omega_A \approx \omega$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{JC} = \hbar\omega \hat{c}^\dagger \hat{c} + \frac{1}{2} \hbar\omega_A \hat{\sigma}_z + \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{c} + \hat{c}^\dagger \hat{\sigma}_-)$$

Jaynes Cummings Hamiltonian  
(eine Mode, ein Atom)

• Problem ist exakt lösbar