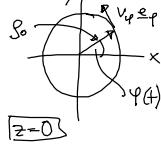


5.3 Bahnkurven

(i) gerade Bahn: $r(t) = \underline{v}t + r_0$ (S.16)

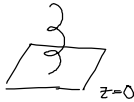
(ii) Kreisbahn:



$$\left. \begin{aligned} s(t) &= s_0 \\ \varphi(t) &= \frac{v}{s_0} t = \omega t \\ z(t) &= 0 \end{aligned} \right\} (S.17)$$

↑
Kreisfrequenz

(iii) Helix



$$\left. \begin{aligned} s(t) &= s_0 \\ \varphi(t) &= \frac{v_\varphi}{s_0} t = \omega t \\ z(t) &= v_z t \end{aligned} \right\} (S.18)$$

• Teil der Geschw.

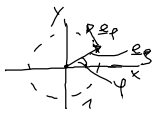
$$\underline{v}(t) = \frac{dr}{dt} = \dot{r} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{r(t+\varepsilon) - r(t)}{\varepsilon} \quad (S.19)$$

(iv) Bsp: (1) (S.15)/(S.16): $r(t) = \underline{v}t + r_0 \rightarrow \frac{dr}{dt} = \underline{v}$ (S.20)

Abl. der Komp.

(2) (S.17): $r(t) = s_0 \underline{e}_s \rightarrow \frac{dr}{dt} = \dot{s}_0 \underline{e}_s + s_0 \dot{\underline{e}}_s$

$\dot{\underline{e}}_s$: (i) Überlegung



$$\dot{\underline{e}}_s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\underline{e}_s(t+\varepsilon) - \underline{e}_s(t)}{\varepsilon} = \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi$$

(ii) Rechnen:

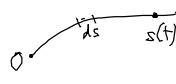
$$\underline{e}_s = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \dot{\underline{e}}_s = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi$$

$$\rightarrow \frac{dr}{dt} = s_0 \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi = v_\varphi \underline{e}_\varphi \quad (S.21)$$

(3) (S.18): $r(t) = s_0 \underline{e}_s + v_z t \underline{e}_z \xrightarrow{(S.21)} \frac{dr}{dt} = v_\varphi \underline{e}_\varphi + v_z \underline{e}_z$ (S.22)

• Bogenlänge-Darstellung

Teil der Bahn



$ds = \frac{v}{|\underline{v}|} dt$... zurückgelegte Weglänge in dt (S.23)

$$\rightarrow s(t) = \int_0^t ds' = \int_0^t v(t') dt' \quad \dots \text{ zurückgelegte Weglänge zur Zeit } t = \text{Bogenlänge} \quad (S.24)$$

Bahnkurve, Umkehr von $s(t)$

$$\boxed{r(t) \equiv r(t(s)) = r(s)} \quad (S.25)$$

[physikal. Notation!
 $r(t), r(s)$... dieselbe
 Bahn, unterschiedliche
 Funktionen]

Bilde:

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{ds}$$

↑
Kettenregel $v(t)$ $\frac{1}{v(t)}$

$$\rightarrow \boxed{\frac{dr}{ds} = \hat{t}, |\hat{t}|=1} \quad (S.26)$$

... Tangentialvektor

NB: neben t oder s sind andere Kurvenparameter
 möglich: Bsp. $\omega t = \varphi$

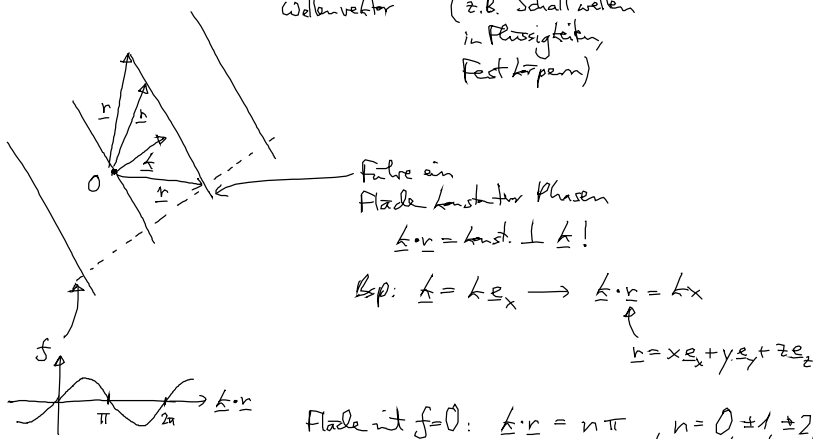
6. Vektoranalysis

- Motivation:
 - räumliche Veränderung von physikal. Größen
 - Differenzieren/Abkitten
 - ≙ Erkunden lokaler Veränderungen

6.1 Skalarfelder

- Skalarfeld $f(r)$: ordnet jedem Raumpunkt $P[(x_1, x_2, x_3)$ oder r] ein Skalar $\in \mathbb{R}$ zu.
 - Bsp: Temp. T , Druck p (in einer Flüssigkeit)
 - Massendichte ρ (z.B. in der Atmosphäre),
 - potentielle Energie U , ...

- Bsp:
 - (1) ebene Welle: $f(r) \sim \sin(\underbrace{k \cdot r}_{\text{Phase}})$
 - Wellenvektor (z.B. Schallwellen in Flüssigkeiten, Festkörpern)



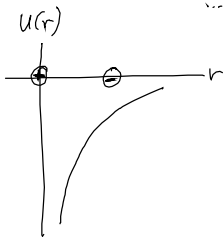
(2) Kugelsymmetrisches (Potential)feld: $U = U(r)$ (6.2)

Kugelkoord.
Abstand vom Nullpkt.

„Äquipotential“ fläche:

$U(r) = \text{konst.} \rightarrow r = \text{konst.}$
 $\hat{=}$ Kugel fläche um $r=0$

Bsp: $U(r) \sim \frac{1}{r}$ (6.3)



... potentielle Energie einer
Test { masse
ladung im Feld
} einer Massepotes
} einer Pkt. Ladung

(3) zylindersymmetrisches (Potential)feld: $U = U(\rho)$ (6.4)

„Äquipotential“ fläche: $U(\rho) = \text{konst.}$

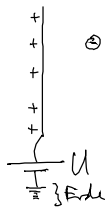
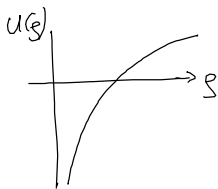
$\rightarrow \rho = \text{konst.}$

$\hat{=}$ Zylinder fläche um
z-Achse

Zyl. Koord.
Abstand von
z-Achse

Bsp: $U(\rho) \sim \ln \rho$ (6.5)

... pot. Energie einer Testladung im
Feld eines unendlich langen, homogen
geladenen Drahtes



6.2 Vektorfelder

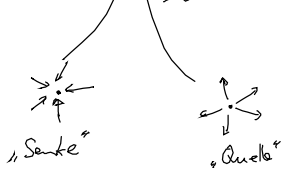
• Vektorfeld $\underline{a}(\underline{r})$: ordnet jedem Raumpkt. P einen Vektor $\in V_P$ zu.

Bsp: Kraft \underline{F} , Geschwindigkeit (z. B. in Flüssigkeit)
elektr. (\underline{E}) / magnet. (\underline{H}) Feld ...

• Bsp:

(1) Kugelsymmetr. (Quellen-/Senken-) Feld:

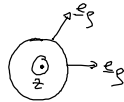
$$\underline{a}(\underline{r}) = \pm \frac{a(r)}{r} \underline{e}_r \quad (6.6)$$



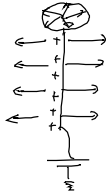
Bsp: $\underline{a}(\underline{r}) \sim \frac{1}{r^2} \underline{e}_r$ (6.7)

- ... (i) E-feld einer Pkt. Ladung
- (ii) Kraft auf Test $\left\{ \begin{array}{l} \text{Masse} \\ \text{Ladung} \end{array} \right.$ im Feld $\left\{ \begin{array}{l} \text{eines Masse p. Feldes} \\ \text{einer Pkt. Ladung} \end{array} \right.$

(2) zylinder symmetr. Feld:
 $\underline{a}(\underline{r}) = a(\rho) \underline{e}_\rho$ (6.8)



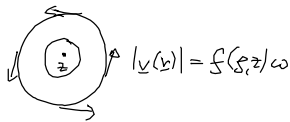
Bsp: $\underline{a}(\underline{r}) \sim \frac{1}{\rho} \underline{e}_\rho$



- ... (i) E-feld eines hor. geladenen Drahtes
- (ii) Kraft (qE) auf Testladung im Feld eines hor. gelad. Drahtes

(3) (zylinder symmetr.) Wirbelfeld (Vortex)

$\underline{v}(\underline{r}) = f(\rho, z) \omega \underline{e}_\varphi$



Flüssigkeit, Tornado's, Magnetfelder

Bsp 1: $\underline{v}(\underline{r}) = \omega \rho \underline{e}_\varphi$ mit $|\underline{v}| = \omega \rho$!

$\stackrel{!}{=} \underline{\omega} \times \underline{r}$
 "Wirbelstärke"
 hier $\underline{\omega} = \omega \underline{e}_z$



Beweis: $\underline{\omega} = \omega \underline{e}_z$, $\underline{r} = \rho \underline{e}_\rho + z \underline{e}_z$

mit $\underline{e}_z \times \underline{e}_z = 0$
 $\underline{e}_z \times \underline{e}_\rho = \underline{e}_\varphi$



$\rightarrow \underline{\omega} \times \underline{r} = \omega \rho \underline{e}_\varphi$ qed

Bsp 2: $\underline{H}(\underline{r}) \sim \frac{I}{\rho} \underline{e}_\varphi$ (6.12)



... Feld eines mit Strom I durchflossenen Leiters

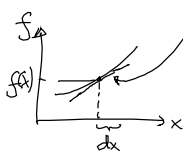


6.3 Vollständiges Differential einer Funktion in 3D

• 10) Einweg: Geg $f(x)$

Wert in Nachbarschaft von x : Taylorentwicklung!

$$f(x+dx) = \underbrace{f(x) + \frac{df}{dx} dx}_{\text{Grade}} + \underbrace{O(2)}_{\text{Terme } (dx)^n, n \geq 2} \quad (6.13)$$



Def: vollständiges Differential:
 $df(x) = \frac{df}{dx} dx$ (6.14)

(6.13) $\rightarrow f(x+dx) - f(x) = df + O(2)$ (6.15)

• 30) Geg: $f(x_1, x_2, x_3)$

Wert in Nachbarschaft von $\{x_1, x_2, x_3\}$:

$f(x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3)$ mit (6.13) sukzessive

$$= \underbrace{f(x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3)}_{\dots} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \Big|_{\substack{x_1+dx_1 \\ x_2+dx_2 \\ x_3}} dx_3$$

$$\dots$$

$$f(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{x_1, x_2, x_3} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{x_1, x_2, x_3} dx_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} \Big|_{x_1, x_2, x_3} dx_1 dx_3 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} \Big|_{x_1, x_2, x_3} dx_2 dx_3$$

$$\approx \frac{\partial f}{\partial x_3} \Big|_{x_1, x_2, x_3} dx_3 + O(2)$$

$\rightarrow f(x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3) - f(x_1, x_2, x_3)$
 $= df + O(2)$ (6.16)

Def: vollständiges Differential:
 $df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ (6.17)

NB: $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{x_j, j \neq i}$