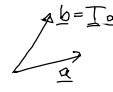


## 4. Tensoren 2. Stufe

### 4.2 Definitionen & dyadisches Produkt

Def:  $\underline{I}: \underline{a} \mapsto \underline{b} = \underline{I}\underline{a}$   (4.1)

Linearität:  $\underline{I}(p\underline{a} + q\underline{b}) = p\underline{I}\underline{a} + q\underline{I}\underline{b}$

• Wirkungsweise in Komp.:

$$T_{ij} := \underline{e}_i \cdot \underline{I}\underline{e}_j \quad (4.4)$$

$$b_i = T_{ij} a_j \quad (4.5)$$

• Entwicklung von  $\underline{I}$  nach Basis

$$\underline{I} = T_{ij} \underbrace{\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j}_{\text{Basis in } V \times V \text{ (Produktraum)}} \quad (4.6)$$

• dyadisches Produkt:

$$\underline{a} \otimes \underline{b} \in V \times V$$

$$1. \text{ Bilinearität } \underline{a} \otimes \underline{b} \stackrel{\text{Lp}}{=} (a_i \underline{e}_i) \otimes (b_j \underline{e}_j) = a_i b_j (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) \quad (4.7)$$

$$2. (\underline{a} \otimes \underline{b}) \underline{c} = \underline{a} (\underline{b} \cdot \underline{c}) \in V$$

Vgl. Skalarprodukt:  $\underline{a} \cdot \underline{b}$   
Kreuzprodukt:  $\underline{a} \times \underline{b}$

• Konsistenz?

$$(4.4) \rightarrow T_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{I}\underline{e}_j \stackrel{(4.6)}{=} \underline{e}_i \cdot (T_{kl} \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l) \underline{e}_j$$

$$\stackrel{(4.7)}{=} \underline{e}_i \cdot (T_{kl} \underline{e}_k) (\underline{e}_l \cdot \underline{e}_j) \stackrel{(4.1)}{\underset{\text{lin.}}{=} T_{kl} \underbrace{(\underline{e}_i \cdot \underline{e}_k)}_{\delta_{ik}} \underbrace{(\underline{e}_l \cdot \underline{e}_j)}_{\delta_{lj}} = T_{ij} \checkmark}$$

$\rightarrow (4.4)$  und  $(4.6)$  sind konsistent unter  $(4.7)$ !

• Komponenten  $\underline{a} \otimes \underline{b}$ :

$$(\underline{a} \otimes \underline{b})_{ij} \stackrel{(4.1)}{=} \underline{e}_i \cdot (\underline{a} \otimes \underline{b}) \underline{e}_j \stackrel{(4.7)}{=} \underline{e}_i \cdot \underline{a} ( \underline{b} \cdot \underline{e}_j )$$

$$\Rightarrow \boxed{(\underline{a} \otimes \underline{b})_{ij} = a_i b_j} \quad (4.8)$$

### 4.3 Spezielle Tensoren (wie bei Matrizen)

• transponierter Tensor  $\underline{\underline{I}}^t$ :  $\underline{a} \cdot \underline{\underline{I}} \underline{b} := \underline{b} \cdot \underline{\underline{I}}^t \underline{a}$  (4.8)

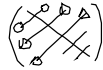
$\underline{a} = \underline{e}_i$   
 $\underline{b} = \underline{e}_j$

$T_{ji} = (\underline{\underline{I}}^t)_{ij}$

vgl. Matrizen Gl. (2.22)!

• allg. Tensor 2. Stufe:  $n=3 \rightarrow 3 \times 3 = 9$  unabh. Komp.

(i) symmetrischer Tensor 2. Stufe:  $\underline{\underline{I}}^t = \underline{\underline{I}} \xrightarrow{(4.9)} T_{ji} = T_{ij}$  (4.10)



... 6 unabh. Komp.

$T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{12}, T_{13}, T_{23}$

$T_{21}$  etc

(ii) antisymmetrischer Tensor 2. Stufe:

$\underline{\underline{I}}^t = -\underline{\underline{I}} \xrightarrow{(4.9)} T_{ji} = -T_{ij}$  (4.11)  
 $\rightarrow T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0$

... 3 unabh. Komp.:  $T_{12}, T_{13}, T_{23}$

Bsp:  $\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r} := \underline{\underline{\Omega}} \underline{r}$



mit  $\Omega_{ij} = (\underline{\omega} \times)_{ij} = \epsilon_{ijk} \omega_k$

$\epsilon_{123} = -\epsilon_{132} = -1$

$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$

• Zerlegung:

$\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{I}}_s + \underline{\underline{I}}_A$  (4.12)  
 $= \frac{1}{2}(\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{I}}^t) + \frac{1}{2}(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{I}}^t)$   
symmetrisch      antisymmetrisch

• Einheits-tensor:

$\underline{\underline{1}} = \delta_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$  (4.13)

dam:  $\underline{e}_i \cdot \underline{\underline{1}} \underline{e}_j = \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$   
 $\underline{\underline{1}} \underline{\underline{1}} = \underline{\underline{1}} \underline{\underline{1}} = \underline{\underline{1}}!$

### 4.4 Algebra (wie bei Matrizen)

• Addition:  $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} \rightarrow C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$  (4.14)

• skalare Multiplikation:  $\underline{\underline{C}} = p \underline{\underline{A}} \rightarrow C_{ij} = p A_{ij}$ ,  $p \in \mathbb{R}$  (4.15)

• Multiplikation von Tensoren:

$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}} \rightarrow C_{ij} = A_{ik} B_{kj}$  (4.16)  
 $\neq \underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}}$

Beweis:  $C_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{A}} \underline{e}_j$

$= \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{A}} (\delta_{kl} \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l) \underline{e}_j$

⋮

$$= A_{ik} B_{kj}$$

- Inverser Tensor:  $\underline{\underline{I}}^{-1}$ :  $\underline{\underline{I}} \underline{\underline{I}}^{-1} = \underline{\underline{1}} \rightarrow T_{ik} (T^{-1})_{kj} = \delta_{ij}$  (4.17)
- Spurbildung:  $\text{Sp} \underline{\underline{I}} = T_{ii}$  (4.18)

#### 4.5 Drehungen

- Erimmung [Kap. 2.3]:  $\{\underline{e}_i\} \rightarrow \{\underline{e}'_i\}$  mit  $\underline{e}'_i = D_{ij} \underline{e}_j$  (2.32)
- $$\left. \begin{aligned} D_{ij} D_{ki} &= \delta_{kj} \\ \underline{\underline{D}} \underline{\underline{D}}^t &= \underline{\underline{1}} \end{aligned} \right\} (2.33)$$

- aktiver Standpunkt:

$$\underline{\underline{I}} = T_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \xrightarrow{\text{gedreht}} \underline{\underline{R}} \underline{\underline{I}} = T_{kl} \underline{e}'_k \otimes \underline{e}'_l$$

$$= T_{kl} D_{ki} D_{lj} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

in  $\{\underline{e}'_i\}$

$$\boxed{[\underline{\underline{R}} \underline{\underline{I}}]_{ij} = T_{kl} D_{ki} D_{lj} = D_{ik}^t D_{jl}^t T_{kl}} \quad (4.19)$$

- passiver Standpunkt:  $\underline{\underline{I}}$  in  $\{\underline{e}'_i\}$

$$\text{also: } \underline{\underline{I}} = T_{kl} \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l = T'_{ij} \underline{e}'_i \otimes \underline{e}'_j$$

→ Trafo von Tensorkomp.:

$$\begin{aligned} T'_{ij} &\stackrel{(4.4)}{=} \underline{e}'_i \cdot \underline{\underline{I}} \underline{e}'_j = \underline{e}'_i \cdot (T_{kl} \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l) \underline{e}'_j \\ &= T_{kl} \underbrace{\underline{e}'_i \cdot \underline{e}_k}_{D_{ik}} \underbrace{\underline{e}_l \cdot \underline{e}'_j}_{D_{jl}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} T'_{ij} &= D_{ik} D_{jl} T_{kl} \\ T_{ij} &= D_{ik}^t D_{jl}^t T'_{kl} \end{aligned}} \quad (4.20)$$

zeige!

#### 4.6 Diagonalisierung eines symmetrischen Tensors

- Motivation: „Tensor begreifen“

QM: Operator  $\rightarrow$  Meßgrößen!

- i.f:  $n=3!$  alles reell ↙ bij. ONB
- Eigenwertproblem des Tensors / der Matrix  $\underline{\underline{I}}$ :

$$\boxed{\underline{\underline{I}} \underline{a} = \lambda \underline{a}} \quad (4.21)$$

Suche  $a$  so, dass  $\underline{I}a \parallel a$ !

$\lambda$  ... Eigenwert (EW) zu  $a$  ... Eigenvektor (EV)

• Bsp: Dreiecksmatrix über Körper

$$\underline{I} = \underline{O} \underline{O} \rightarrow \underline{O} \underline{O}^{(i)} = \underline{O}^{(i)} \underline{O}^{(i)}$$

$\rightarrow \underline{I} \parallel \underline{O}^{(i)}! \rightarrow$  stabile Rotationen

• Bestimmung: (4.21)  $\rightarrow \boxed{(\underline{I} - \lambda \underline{I})a = \underline{O}}$  (4.22) ... homogenes LGS!!

Komp. 3: (4.22) besitzt nichttriviale Lsg.  $a \neq 0$  falls

$(\underline{I} - \lambda \underline{I})^{-1}$  nicht existiert

$$\det[\underline{I} - \lambda \underline{I}] = 0 = \begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} \quad (4.23)$$

... charakteristisches Polynom von  $\underline{I}$

= kubische Gl. für  $\lambda$

$\rightarrow$  3 Lösungen = EW:  $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}$  [i.a. 1 reelle & 2 komplexe Lsg.]  
mit EV:  $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$

• Berechnung: (i) systematisch

1. Löse (4.23)  $\rightarrow \lambda^{(i)}$

2. Löse (4.22) mit  $\lambda^{(i)} \rightarrow a^{(i)}$

(ii) Rate  $a^{(i)} \xrightarrow{(4.21)} \lambda^{(i)}$

Bsp:  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} a^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda^{(1)} = 1 \\ a^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda^{(2)} = 2 \\ a^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda^{(3)} = 0 \end{matrix}$

• Satz:  $\boxed{\text{Falls reelles } \underline{I} \text{ symmetrisch} \rightarrow \lambda^{(i)} \in \mathbb{R}}$  (4.24)

Beweis:  $\left. \begin{matrix} a^* \cdot \underline{I} a = \lambda a \\ a \cdot \underline{I} a^* = \lambda^* a^* \end{matrix} \right\} \ominus$  \*... komplex konjugiert

$$\underbrace{a^* \cdot \underline{I} a}_{\underline{I}^t} - \underbrace{a \cdot \underline{I} a^*}_{\underline{I}^t} = 0 = \underbrace{(\lambda - \lambda^*)}_{2 \operatorname{Im} \lambda} \underbrace{a^* \cdot a}_{\neq 0} \rightarrow \lambda = \lambda^* \text{ gel}$$

• Satz:  $\boxed{\text{Die EV eines reellen symmetrischen } \underline{I} \text{ sind orthogonal: } a^{(i)} \cdot a^{(j)} = \delta_{ij}}$

Beweis: (1)  $\lambda^{(i)} \neq \lambda^{(j)}$   
 $\left. \begin{matrix} a^{(j)} \cdot \underline{I} a^{(i)} = \lambda^{(i)} a^{(j)} \\ a^{(i)} \cdot \underline{I} a^{(j)} = \lambda^{(j)} a^{(i)} \end{matrix} \right\} \ominus$

mit  $\underline{I} = \underline{I}^t \rightarrow 0 = (\lambda^{(i)} - \lambda^{(j)}) a^{(i)} \cdot a^{(j)} \xrightarrow{\lambda^{(i)} \neq \lambda^{(j)}} a^{(i)} \perp a^{(j)}$

- (2) Entartung:  $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)}$
- (i) isotoper Tensor:  $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)}$
  - (ii) axial-symmetrischer Tensor:  $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} \neq \lambda^{(3)}$ , Richtung  $\mathbf{a}^{(3)}$  ausgezeichnet
- } Wähle orthogonale  
EV im  
(i) 3-dim.  
(ii) 2-dim.  
Eigensraum

• Darstellung von  $\underline{I}$  in EV-Basis  $\{\mathbf{a}^{(i)}\}$ :

Ges  $\underline{I} = T'_{ij} \mathbf{a}^{(i)} \otimes \mathbf{a}^{(j)}$   
mit  $\underline{I} \mathbf{a}^{(i)} = \lambda^{(i)} \mathbf{a}^{(i)}$ ,  $\mathbf{a}^{(i)} \cdot \mathbf{a}^{(j)} = \delta_{ij}$

$$\rightarrow T'_{ij} \stackrel{(4.6)}{=} \mathbf{a}^{(i)} \cdot \underbrace{\underline{I} \mathbf{a}^{(j)}}_{\lambda^{(j)} \mathbf{a}^{(j)}} \rightarrow \left. \begin{aligned} T'_{ij} &= \lambda^{(i)} \delta_{ij} \\ \underline{I}' &= \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{(3)} \end{pmatrix} \\ \underline{I} &= \sum_i \lambda^{(i)} \mathbf{a}^{(i)} \otimes \mathbf{a}^{(i)} \end{aligned} \right\} (4.27)$$

... Diagonalgestalt

• Transformation der Tensorkomp. auf  $\{\mathbf{a}^{(i)}\}$ :

$$\left. \begin{aligned} D_{ij} &= \mathbf{a}^{(i)} \cdot \mathbf{a}^{(j)} \\ T'_{ij} &= D_{ik} D_{jl} T_{kl} \end{aligned} \right\} (4.28)$$

• graphische Darstellung von  $\underline{I}$ :

- (1) "Ziegel" Tensor besitzt Richtung im Raum!
- (2) Ellipsoid: Halbachse  $\parallel \mathbf{a}^{(i)}$  mit Länge  $\lambda^{(i)}$

## 5. Euklidischer Raum

• Motivation:

(1) Grundlage der Newtonschen Mechanik

Physikal. Anlageraum  
= euklidischer Raum = flacher Raum

→ euklidische Geometrie gilt

Bsp: a) Winkelsumme im Dreieck =  $180^\circ$   
(nicht auf der Kugel:



b) Satz von Pythagoras

c) Parallelaxiom:



(2) Unterschiede:

Physikal. Ansatzraum  $A$  mit Punkten  $P$  und  
Vektorraum  $V_p$  („Tangentenraum“), angelegt  
an jedem Pkt  $P$ , indem die physikal. Vektoren

- gekrümmter Raum:  
Absolut wichtig zum Verständnis der ART



- flacher Raum:  $A$  &  $V_p$  bilden affinen  
Raum [s. Kap. 5.1]

