

2.3 Drehungen/Spiegelungen

- Problemstellung:
 - (1) Beschreibe Drehungen/Spiegelungen von $\underline{a} \in V$
 - (2) Darstellung von \underline{a} bzgl. neuer Basis

- Anwendung:
 - (1) Basiswechsel
 - (2) starrer Körper (Klass. Mechanik)
 - (3) Computergraphik (Drehungen von Objekten)
 - (4) Symmetrie betrachtungen
 - (5) Eugene Paul Wigner
[Prof. an TU \rightarrow 1933
Nobelpreis 1963.]

- Orthonormalbasis (ONB):

$$\{e_1, e_2, e_3\} \xrightarrow[\text{Spiegelung}]{\text{Drehung um bel. Achse}} \{e'_1, e'_2, e'_3\}$$

gedrehtes e_1

$$e'_i = D_{ij} e_j \quad \text{mit} \quad D_{ij} = e'_i \cdot e_j = \cos \angle(e'_i, e_j) \quad (2.32)$$

- Eigenschaften der „Drehmatrizen“ $\underline{D} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$
Winkel- und Norm erhaltend („Isometrie“)

insbes. $e'_i \cdot e'_j = \delta_{ij} \stackrel{(2.32)}{=} (D_{ik} e_k) \cdot (D_{jl} e_l) = D_{ik} D_{jl} \underbrace{e_k \cdot e_l}_{\delta_{kl}}$

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ D_{ik} = D_{ki}^t \\ \rightarrow \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{l} D_{ik} D_{jl} = \delta_{ij} \\ \underline{D} \underline{D}^t = \underline{1} \\ \underline{D}^t = \underline{D}^{-1} \end{array}} \quad (2.33)$$

... orthogonale Matrix $\in O(3)$

(nicht kommutative Gruppe aller Drehungen & Spiegelungen)

\rightarrow Übungen

Bem: \underline{D}^{-1} ... macht Drehung \underline{D} rückgängig = zu \underline{D} inverse Element

- Konstruktion:

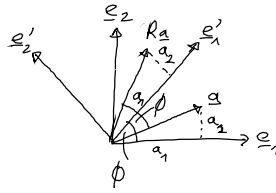
$$(2.32) \rightarrow \underline{D} = \begin{pmatrix} [e'_1] = [e'_1 \cdot e_1, e'_1 \cdot e_2, e'_1 \cdot e_3] \\ [e'_2] = \dots \\ [e'_3] = \dots \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

• Problemlösung:

(1) Drehung/Spiegelung von \underline{a} : $\underline{a} = a_i \underline{e}_i \longrightarrow R \underline{a} \stackrel{!}{=} a_i \underline{e}'_i = a_i D_{ij} \underline{e}_j$

Darstellung in $\{\underline{e}_i\}$

$$\begin{aligned} \longrightarrow [R \underline{a}]_j &= a_i D_{ij} \\ &= D_{ji}^t a_i \quad (2.35) \\ \text{in } \mathbb{R}^3: \underline{R \underline{a}} &= \underline{D}^t \underline{a} \end{aligned}$$



„aktiver“ Standpunkt

(2) \underline{a} in neuer Basis: $\underline{a} = a_j \underline{e}_j \stackrel{!}{=} a'_i \underline{e}'_i$

\longrightarrow Trf. von Vektorkomp.

$$a'_i = \underline{e}'_i \cdot \underline{a} = \underbrace{\underline{e}'_i \cdot \underline{e}_j}_{D_{ij}} a_j$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \begin{cases} a'_i = D_{ij} a_j \\ a_i = D_{ij}^t a'_j \end{cases} &\longrightarrow D_{ki}^t a'_i = \underbrace{D_{ki}^t D_{ij}}_{\delta_{kj}} a_j = a_k \end{aligned}$$

„passiver Standpunkt“

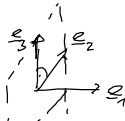
mit $\underline{a}, \underline{a}' \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \underline{a}' &= \underline{D} \underline{a} \\ \underline{a} &= \underline{D}^t \underline{a}' \end{aligned} \quad (2.32)$$

• Bsp. 1: Spiegelung an Ebene $\perp \underline{e}_1$:

$$\longrightarrow \underline{e}'_1 = -\underline{e}_1, \underline{e}'_2 = \underline{e}_2, \underline{e}'_3 = \underline{e}_3$$

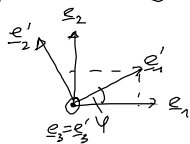
$$\longrightarrow \underline{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$



Bsp. 2: „Raumspiegelung“ = Pkt. Spiegelung am „Ursprung“

$$\longrightarrow \underline{e}'_i = -\underline{e}_i \longrightarrow \underline{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Bsp. 3: Drehung um \underline{e}_3 (z-Achse):

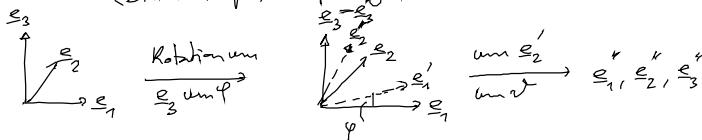


$$\underline{D}(\underline{e}_3, \varphi) = [\underline{e}'_i \cdot \underline{e}_j] = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

• Bsp. 4: Eulersche Winkel (verschiedene Konventionen)

\longrightarrow allg. Orientierung von $\{\underline{e}'_i = R \underline{e}_i\}$

(starrer Körper, Computergraphik)



$$\text{um } \underline{e}_3 \text{ um } \varphi \rightarrow \underline{e}_1'', \underline{e}_2'', \underline{e}_3'': \quad \underline{D}(\varphi, \varphi, \varphi) = \underbrace{\underline{D}(\underline{e}_3'', \varphi)}_{\text{in } \{\underline{e}_i''\}} \underbrace{\underline{D}(\underline{e}_2'', \varphi)}_{\text{in } \{\underline{e}_i''\}} \underline{D}(\underline{e}_1, \varphi) \quad (2.41)$$

→ allg. Drehg/Spiegelg: 3 Winkel!! (s. Übung)

Applet: Webseite Vorlesung → Materialien

• Händigkeit:

(i) Drehungen: Rechtssystem → Rechtssystem

$$\text{Spatprodukt: } \underline{e}_3' \cdot (\underline{e}_1' \times \underline{e}_2') = 1 = \begin{vmatrix} \underline{e}_1' \cdot \underline{e}_1 & \underline{e}_1' \cdot \underline{e}_2 & \underline{e}_1' \cdot \underline{e}_3 \\ \underline{e}_2' \cdot \underline{e}_1 & \dots & \dots \\ \underline{e}_3' \cdot \underline{e}_1 & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

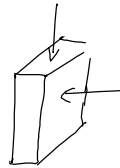
$$\rightarrow \boxed{1 \stackrel{(2.41)}{=} |\underline{D}| = \det \underline{D}} \quad (2.42)$$

→ $\underline{D} \in SO(3)$... eigentlich orthogonale Matrizen (nur Rotationen)

(ii) Spiegelg: Rechtssystem → Linkssystem

$$\boxed{\underline{e}_3' \cdot (\underline{e}_1 \times \underline{e}_2) = -1 = |\underline{D}|}$$

• $\underline{D} \in O(3)$... Punktoperationen
wichtig zur Klassifizierung von Kristallen
(kubische, hexagonale, ... Kristalle)



2.4. Abstrakte Definition eines Vektorraums

• Grd: (i) Rechenregeln⁴ für Vektoren
(ii) Erweiterung des Vektorbegriffs

• Def: → s. Folie

• Bsp: (i) Vektoren für Physiker (→ Kap 2.1)

(ii) \mathbb{R}^n , $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$... n-Tupel, $a_i \in \mathbb{R}$
Zeilenvektor

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \dots \text{Spaltenvektor}$$

$$\underline{a} + \underline{b} := (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

$$p \underline{a} := (p a_1, \dots, p a_n), \quad p \in \mathbb{R}$$

→ Darstellung von Vektoren bzgl. Basis (→ Kap. 2.1.1)

(iii) $n \times m$ -Matrizen $\in \mathbb{R}^{n \times m}$ (→ Kap. 2.2)

$$\left. \begin{aligned} [\underline{A} + \underline{B}]_{ij} &:= A_{ij} + B_{ij} \\ [p \underline{A}]_{ij} &:= p A_{ij} \end{aligned} \right\} (2.21)$$

(iv) entsprechen: $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n+m}$

(v) Polynome n -ten Grades:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad \text{äquivalent zu } (n+1)\text{-Tupel } \in \mathbb{R}^{n+1}$$

→ Taylorentwicklung

→ Legendre polynome (s. Übungen)