von Neumann – Beweis II.

Wiederholung:

(N1) jede Observable hat einen Operator $\in \mathcal{H}$

(N2) Messung $f(\hat{O})$ führt auf $f(O)$, eindeutig

(N3) Superpositionsprinzip : $\langle aA + bB \rangle = a\langle A \rangle + b\langle B \rangle$

letzte Mal gezeigt, daraus allein folgt

$$\langle A \rangle = \mathrm{tr}(\varrho A) \quad \text{mit } \varrho = \varrho^{+}$$

(verwendet: Linearität, Vollständigkeitsrelation, und Eindeutigkeitsrelation)

(i) ϱ ist positiv definit $\quad A = |\phi\rangle\langle\phi|$

$$A^2 = |\phi\rangle\underbrace{\langle\phi|\phi\rangle}_{=1}\langle\phi| = A \quad , |\phi\rangle \text{ beliebig}$$

$$\langle R^2 \rangle \geq 0 \quad , \quad 0 \leq \langle R^2 \rangle = \langle R \rangle = \mathrm{tr}(\varrho R)$$

$$= \langle\phi|\varrho|\phi\rangle$$

(ii) eindeutige Darstellung: $\langle R \rangle = \mathrm{tr}(\varrho R) = \mathrm{tr}(\varrho' R)$

$$R = |\phi\rangle\langle\phi| \implies \langle\phi|\varrho - \varrho'|\phi\rangle = 0$$

(folgt aus der Linearität)

(iii) $\Delta R > 0 \qquad \Delta R = \sqrt{\langle R^2 \rangle - \langle R \rangle^2}$

$\langle R^2 \rangle = \langle R \rangle^2$ führt auf Widerspruch

$$R = |\phi\rangle\langle\phi| \qquad , R = R^2$$

$$\mathrm{tr}(\varrho R^2) \overset{!}{=} \left[\mathrm{tr}(\varrho R)\right]^2$$

$$\langle\phi|\varrho|\phi\rangle = \left[\langle\phi|\varrho|\phi\rangle\right]^2 \quad , \quad a = a^2$$

also muss $\varrho = 0$, $\varrho = \underline{\mathbb{1}}$

sei $\varrho = 0$: triviale Lösung (keine Information) sei $\rho = \mathbb{1}$: $\quad \mathrm{tr}(\rho) = 1$

d.h. $\mathrm{tr}(\mathbb{1}) = 1$

aus Normierbarkeit für kontinuierliche Operatoren $\hat{p}, \hat{x}$ nicht möglich

diskretes Beispiel: $\hat{n} = c^+c$, $c^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$

$$\langle (c^+c)^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | (c^+c)^2 \underbrace{\rho}_{=\mathbb{1}} | n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \overset{!}{=} \left(\sum_{n=0}^{\infty} n \right)$$

Zweifach Widerspruch konstruiert, d.h. wir finden im $\mathcal{H}$ keine dispersionsfreien Ensembles.

von Neumann: „Hence, within the limits of our conditions, the decision is made, and it is against causality because all ensembles have dispersion, even the homogeneous.“

$\Delta A > 0$

aber nur unter der Bedingung, dass $\langle \alpha A + \beta B \rangle = \alpha \langle A \rangle + \beta \langle B \rangle$ gilt.

Ansatz von Bell und Bohm war, eine Theorie zu konstruieren, für die die Linearität nicht gilt

$$\langle A \rangle_{HVT} = \int d\vec{\lambda} \; E(A_{\vec{\lambda}})$$

Eigenwert von $A_{\vec{\lambda}}$

hidden variable

Randbedingung $\langle A \rangle_{HVT} = \langle A \rangle_{QM}$

[N. David Mermin „Hidden variables and the two theories of John Bell“ Rev. Mod. Phys 65, 803 (1993)]

Wir betrachten $\dim[\mathcal{H}] = 2$ und $A \in \mathcal{H}$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3^* \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = a_0 \underline{\mathbb{1}} + a_x \sigma_x + a_y \sigma_y + a_z \sigma_z$$

$$\underline{\mathbb{1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$a_0 = \frac{a_1 + a_4}{2}, \quad a_x = \frac{a_1 - a_4}{2} + \mathrm{Re}[a_3]$$

$$a_y = \mathrm{Im}[a_3]$$

$$a_z = \frac{a_1 - a_4}{2}$$

$$A = a_0 \underline{\mathbb{1}} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}$$

$$\langle \psi | A | \psi \rangle = \langle \psi | a_0 \underline{\mathbb{1}} | \psi \rangle + \langle \psi | \vec{a} \cdot \vec{\sigma} | \psi \rangle$$

$$= a_0 + |\vec{a}| \langle \psi | \vec{n} \cdot \vec{\sigma} | \psi \rangle$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} n_z & n_x - i n_y \\ n_x + i n_y & -n_z \end{pmatrix}$$

$$\det[\vec{\sigma} \cdot \vec{n} - \underline{\mathbb{1}} \lambda] \overset{!}{=} 0 \qquad \lambda^2 - |\vec{n}|^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0, \quad \lambda = \pm 1$$

$$\det[a_0 \underline{\mathbb{1}} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma} - \lambda \underline{\mathbb{1}}] \overset{!}{=} 0$$

$$= a_0 \det \underline{\mathbb{1}} + |\vec{a}| \det[\vec{n} \cdot \vec{\sigma} - \lambda \underline{\mathbb{1}}] = 0$$

$$E(A) = a_0 \pm |\vec{a}|$$

$$\langle \psi | \vec{a} \cdot \vec{\sigma} \overset{(+1)}{|\psi\rangle} = \qquad , \quad \vec{\sigma} \cdot \vec{n} |\psi\rangle = (\pm 1) |\psi\rangle$$

$$= \langle \psi | (\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) | \psi \rangle = \langle \psi | \left[\vec{a} \cdot \vec{b} \, \underline{\mathbb{1}} + i (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\sigma} \right] | \psi \rangle$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{b} + i \underbrace{\langle \psi | (\vec{b} \times \vec{\sigma})}_{= 0} \cdot \vec{a} | \psi \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\langle A \rangle_{av} = a_0 + \vec{a} \cdot \vec{b} \qquad (\vec{b} \text{ hängt ab vom jeweiligen Ensemble})$$

$$\langle A\rangle_{HVT} = \int d\vec{\lambda}\; E(A_{\vec{\lambda}})$$

$$E(A_\lambda) = \begin{cases} a_0 + |\vec{a}|, & \text{wenn } (\vec{\lambda}+\vec{n})\cdot\vec{a} > 0 \\ a_0 - |\vec{a}|, & \text{wenn } (\vec{\lambda}+\vec{n})\cdot\vec{a} \leq 0 \end{cases}$$

$$\langle A\rangle_{HVT} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta\; \underbrace{\lambda^2}_{\text{wählen wir „1"}} \sin\vartheta\; E(A_{\vec{\lambda}})$$

wählen wir $\vec{a} = |\vec{a}|\,\vec{e}_z$

$$\vec{a}\cdot(\vec{\lambda}+\vec{n}) = |\vec{a}|\,(\lambda_z + n_z)$$

$$\lambda_z = \cos\vartheta \qquad \vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{\lambda}+\vec{n}) = |\vec{a}|\,(\cos\vartheta + n_z)$$

Sei ϑ_0 so, dass $\cos\vartheta_0 = -n_z \qquad |n_z| \leq 1$

$\vartheta \in [0, \vartheta_0] \quad \cos\vartheta + n_z \geq 0$

$\vartheta \in (\vartheta_0, \pi] \quad \cos\vartheta + n_z < 0$

$$\langle A\rangle_{HVT} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \Big[\int_0^{\vartheta_0} d\vartheta\, \sin\vartheta\; \underbrace{E(A_\lambda)}_{a_0 + |\vec{a}|} + \int_{\vartheta_0}^{\pi} d\vartheta\, \sin\vartheta\; \underbrace{E(A_\lambda)}_{a_0 - |\vec{a}|} \Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[(a_0 + |\vec{a}|)\, \underbrace{\big[-\cos\vartheta\big]_0^{\vartheta_0}}_{\substack{= -(-n_z) - (-1) \\ = n_z + 1}} + (a - |\vec{a}|)\, \underbrace{\big[-\cos\vartheta\big]_{\vartheta_0}^{\pi}}_{= 1 - n_z} \Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big\{ \cancel{a_0 n_z} + |\vec{a}|\, n_z + a_0 + \cancel{|\vec{a}|} + a_0 - \cancel{|\vec{a}|} - \cancel{a_0 n_z} + |\vec{a}|\, n_z \Big\}$$

$$= a_0 + |\vec{a}|\, n_z = a_0 + \vec{a}\cdot\vec{n} = \langle A\rangle_{QM}$$

$\Rightarrow$ also haben wir eine HVT konstruiert mit $\vec{\lambda}$ als freien Parameter

$$\langle A+B \rangle = \langle A \rangle + \langle B \rangle$$
$$E(A+B) \neq E(A) + E(B)$$

$A = \sigma_x$, $B = \sigma_y$, $C = \sigma_x + \sigma_y = A + B$

$E(A) = \quad \ldots \qquad \det(\sigma_x - \mathbb{1}\lambda) \overset{!}{=} 0 \qquad \lambda_A = \pm 1$

$\lambda_B = \pm 1$

$$\det(\sigma_x + \sigma_y - \mathbb{1}\lambda) \overset{!}{=} 0$$
$$\det(\vec{n} \cdot \vec{\sigma} - \mathbb{1}\tilde{\lambda}) = 0 \qquad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}} \qquad \hat{\lambda} = \pm 1 \qquad \lambda_c = \pm \sqrt{2}$

$$E(A) + E(B) = (\pm 1) + (\pm 1) = \{0, 2, -2\}$$
$$\overset{!}{=} E(A+B) = \pm \sqrt{2} \quad \text{falsch!}$$

$\Rightarrow$ also muss ich nur eine HVT aus Eigenwerten konstruieren, um „über" von Neumann hinauszugehen

jetzt kam Bell: „Kann ich trotzdem bestimmte HVT ausschließen?"

[Franco Selleri „Quantum Paradoxes and Physical Reality", Dordrecht 1990]

BELLSCHE UNGLEICHUNG

System präparieren und zwar in einen Singlett-Zustand $|\Psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\uparrow\rangle_{(1)} |\downarrow\rangle_{(2)} - |\downarrow\rangle_{(1)} |\uparrow\rangle_{(2)} \}$

(hat kein Drehmoment)

- Messergebnisse für Spin ± 1
- perfekte Antisymmetrie, d.h. $A(a,b) = -B(a,b)$

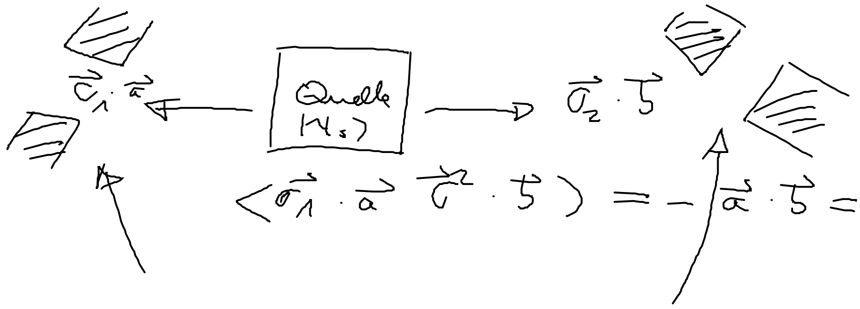
$$\langle \Psi_s | \vec{\sigma}^1 \cdot \vec{a} \; \vec{\sigma}^2 \cdot \vec{b} | \Psi_s \rangle = -\vec{a} \cdot \vec{b}$$

- perfekte Detektoreffizienz

<u>Folgerung</u>: $|P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c})| \leq 1 + P(\vec{b},\vec{c})$

(das wird gezeigt) [Bellsche Ungleichung]

$P(\vec{a},\vec{b}) \neq -\vec{a} \cdot \vec{b}$. d.h. nicht beliebige quantenmechanische Erwartungswerte werden reproduziert!



$$\langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a} \; \vec{\sigma}^2 \cdot \vec{b} \rangle = -\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\sphericalangle(a,b)$$

$A(a,\lambda) = \pm 1$ $\qquad$ $B(b,\lambda) = \pm 1$

klassische Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(a,b) = \int d\lambda \; \rho(\lambda) \; A(a,\lambda) \, B(b,\lambda)$$

Randbedingung $\int d\lambda \; \rho(\lambda) = 1$

$1 \geq P(a,b) \geq -1$, $P(\vec{a},\vec{a}) = -1$ für $\vec{a}$ beliebig

$$A(a,\lambda) = -B(a,\lambda)$$

$$P(a,b) = -\int d\lambda\, \rho(\lambda)\, A(a,\lambda)\, A(b,\lambda)$$

Messapparatur am Ort $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist gleich

$$P(a,b) - P(a,c) = -\int d\lambda\, \rho(\lambda)\, A(a,\lambda)\, A(b,\lambda) + \int d\lambda\, \rho(\lambda)\, A(a,\lambda)\, A(c,\lambda)$$

$$= -\int d\lambda\, \rho(\lambda) \left[A(a,\lambda) A(b,\lambda) - A(a,\lambda) A(c,\lambda) \right]$$

$$= -\int d\lambda\, \rho(\lambda) \left[A(a,\lambda) A(b,\lambda) - A(a,\lambda) \left[A(b,\lambda)\right]^2 A(c,\lambda) \right]$$

$$= -\int d\lambda\, \rho(\lambda)\, A(a,\lambda) A(b,\lambda) \left[1 - A(b,\lambda) A(c,\lambda) \right]$$

$$|P(a,b) - P(a,c)| = \left| -\int d\lambda\, \rho(\lambda) \dots \right|$$

$$\leq \int d\lambda\, \left| \dots \right|$$

$$\leq \int d\lambda\, \Big| \underset{\geq 0}{\rho(\lambda)}\, \underbrace{A(a,\lambda) A(b,\lambda)}_{=1} \Big|\, \left| 1 - A(b,\lambda) A(c,\lambda) \right|$$

$$= \int d\lambda\, \rho(\lambda) \left[1 - A(b,\lambda) A(c,\lambda) \right]$$

$$= 1 - \int d\lambda\, \rho(\lambda)\, A(b,\lambda)\, A(c,\lambda)$$

$$= 1 + P(b,c)$$

$$|P(a,b) - P(a,c)| \leq 1 + P(b,c)$$

Bellsche Ungleichung