Bellsche Ungleichung: $|P(a,b) - P(a,c)| \le 1 + P(b,c)$

mit $P(a,b) = \int d\lambda\, \rho(\lambda)\, A(a,\lambda)\, B(b,\lambda)$

Wiederholung:

(1.) HVT („hidden variable theories") haben zum Ziel, Mess-Schemata zu finden, mit deren Hilfe eine Größe $\vec{x}$ ohne ~~statistische~~ Streuung zu ermitteln ist. $(\Delta x)_{HVT} = 0$

(2.) Beispiel: $E_\lambda(\vec{x}) = \begin{cases} +\frac{1}{2}, & \text{wenn } \vec{\lambda}\cdot\vec{x} \ge 0 \\ -\frac{1}{2}, & \text{wenn } \vec{\lambda}\cdot\vec{x} < 0 \end{cases}$

$$\vec{\lambda} \equiv \vec{B}$$

(3.) wir können zeigen, dass die Mittelung über alle λ unseren quantenmech. MW wieder ergibt.

$$\int d\lambda\, E_\lambda(\vec{x}) = \langle \vec{x} \rangle_{HVT} \stackrel{!}{=} \langle \vec{x} \rangle_{QM}$$

(4.) von Neumann hat gezeigt $|\psi\rangle$, ρ ist keine solche „hidden variable", dass

$$\langle \vec{x} \rangle_{QM} = tr(\rho \vec{x}) \rightarrow \Delta x > 0 \text{ für nicht triviale Systeme}$$

(5.) die Frage ist nun, ob Eigenwertmessungen alleine ausreichen, um jedes qm. Messergebnis im Mittel zu reproduzieren

Bell-Ansatz: $P(a,b) = \int d\lambda\, \rho(\lambda)\, A(\lambda,\vec{a})\, B(\lambda,\vec{b})$

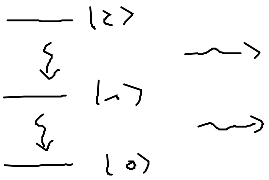
ist es immer $\overline{P(a,b)} = \langle (a,b) \rangle_{QM}$

heute werden wir sehen, dass der multiplikative Ansatz (einfachste und naivste Form der Messung) nicht ausreicht!

$\Longrightarrow$ nicht jede „hidden variable theory" reproduziert die QM im Mittel

$\Longrightarrow$ lokale, multiplikative, separable Theorien stehen im Widerspruch zur QM, und können <u>hart</u> ausgeschlossen, <u>wenn</u> die QM experimentell bestätigt wird

---



$$|\psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2\right\}$$

$$\langle \vec{\sigma}^1 \cdot \vec{a}\; \vec{\sigma}^2 \cdot \vec{b} \rangle = -\vec{a}\cdot\vec{b}$$

wir wollen zeigen, dass $P(a,b) \neq -\vec{a}\cdot\vec{b}$ ist für mindestens eine Kombination $\vec{a},\vec{b}$

$$\left|\overline{P(a,b)} + \overline{\vec{a}\cdot\vec{b}}\right| \leq \varepsilon$$

$$\left\{P(\vec{a},\vec{b}) + \vec{a}\cdot\vec{b} = 0\right\}$$

$$\left|\overline{\vec{a}\cdot\vec{b}} - \vec{a}\cdot\vec{b}\right| \leq \delta$$

$$|\dots| \leq \left|\overline{P(a,b)} + \overline{a\cdot b}\right| + \delta \leq \varepsilon + \delta$$

$$|\overline{P(a,b)} + \overline{a\cdot b} - \delta| \le |\overline{P(a,b)} + \overline{a\cdot b}| + \delta$$

$$|\overline{P(a,b)} + \cancel{\overline{a\cdot b}} - (\cancel{\overline{a\cdot b}} - a\cdot b)|$$

$$= \boxed{|\overline{P(a,b)} + a\cdot b| \le \varepsilon + \delta}$$

$$\overline{P(a,b)} = \int d\lambda\, \rho(\lambda)\, \overline{A(a,\lambda)}\; \overline{B(b,\lambda)}$$

$$\overline{P(a,b)} - \overline{P(a,c)} = \int d\lambda\, \rho(\lambda) \left[\bar{A}_\lambda(a)\bar{B}_\lambda(b) - \bar{A}_\lambda(a)\bar{B}_\lambda(c)\right]$$

$$= \int d\lambda\, \rho(\lambda) \Big[\bar{A}_\lambda(a)\bar{B}_\lambda(b) + \underbrace{\bar{A}_\lambda(a)\bar{B}_\lambda(b)\bar{A}_\lambda(b)\bar{B}_\lambda(c) - \bar{A}_\lambda(a)\bar{B}_\lambda(b)\bar{A}_\lambda(b)\bar{B}_\lambda(c)}_{=0} - \bar{A}_\lambda(a)\bar{B}_\lambda(c)\Big]$$

$$= \int d\lambda\, \rho(\lambda)\, \bar{A}_\lambda(a)\bar{B}_\lambda(b) \left[1 + \bar{A}_\lambda(b)\bar{B}_\lambda(c)\right]$$

$$- \int d\lambda\, \rho(\lambda)\, \bar{A}_\lambda(a)\bar{B}_\lambda(c) \left[1 + \bar{A}_\lambda(b)\bar{B}_\lambda(b)\right]$$

$$|\overline{P(a,b)} - \overline{P(a,c)}| = \left|\int d\lambda \ldots\right|$$

$$\le \int d\lambda\, |\ldots| \le \int d\lambda\, \rho(\lambda)\, \underbrace{|\bar{A}_\lambda(a)\bar{B}_\lambda(b)|}_{=1}\, |1 + \bar{A}_\lambda(b)\bar{B}_\lambda(c)|$$

$$+ \int d\lambda\, \rho(\lambda)\, \underbrace{|\bar{A}_\lambda(a)\bar{B}_\lambda(c)|}_{=1}\, |1 + \bar{A}_\lambda(b)\bar{B}_\lambda(b)|$$

$$\le \int d\lambda\, \rho(\lambda) \left[1 + \bar{A}_\lambda(b)\bar{B}_\lambda(c) + 1 + \bar{A}_\lambda(b)\bar{B}_\lambda(b)\right]$$

$$|\overline{P(a,b)} - \overline{P(a,c)}| \le \int d\lambda \overset{\rho(\lambda)}{\downarrow} \left[2 + \bar{A}_\lambda(b)\bar{B}_\lambda(c) + \underbrace{A_\lambda(b)B_\lambda(b)}\right]$$

was bedeutet das

$$|\overline{P(a,b)} + a\cdot b| \leq \delta + \varepsilon$$

$$|\overline{P(a,a)} + 1| \leq \delta + \varepsilon$$

$$\int d\lambda\, \rho(\lambda) = 1$$

$$|\overline{P(a,a)} + 1| = \left|\int d\lambda\, \rho(\lambda)\, \overline{A_\lambda}(a)\, \overline{B_\lambda}(a) + 1\right|$$

$$= \int d\lambda\, \rho(\lambda) \left[\overline{A_\lambda}(a)\, \overline{B_\lambda}(a) + 1\right] \leq \varepsilon + \delta$$

$$d\lambda\, \rho(\lambda) \left[A_\lambda(a) B_\lambda(a) + 1\right] \leq \varepsilon + \delta$$

$$\int d\lambda\, \rho(\lambda) \left[1 + \overline{A_\lambda}(b)\, \overline{B_\lambda}(c) + \varepsilon + \delta\right]$$

$$= 1 + \overline{P(b,c)} + \varepsilon + \delta$$

$$|\overline{P(a,b)} - \overline{P(a,c)}| \leq 1 + \overline{P(b,c)} + \varepsilon + \delta$$

$$|\overline{P(a,b)} - \overline{P(a,c)}| \leq 2(\varepsilon + \delta) \text{ (Ausgangspunkt)}$$

$$|\overline{P(a,b)} - \overline{P(a,c)}| + 2(\varepsilon + \delta) - 2(\varepsilon + \delta) \geq 0$$

$$\geq |\overline{P(a,b)} - \overline{P(a,c)}| + |-\overline{P(a,b)} - a\cdot b|$$

$$+ |\overline{P(a,c)} + a\cdot c|$$

$$-2(\varepsilon+\delta)$$

$$= |a\cdot c - a\cdot b| - 2(\varepsilon+\delta)$$

$$1 + \overline{P(b,c)} + \varepsilon + \delta \geq |\overline{P(a,b)} - \overline{P(a,c)}|$$

$$\geq |a\cdot c - a\cdot b| - 2(\varepsilon+\delta)$$

und es gilt $x, y \in \mathbb{R}$ $\quad x+y \leq |x+y| \leq |x|+|y|$

$$\overline{P(b,c)} + b\cdot c \leq |\overline{P(b,c)} + \vec{b}\cdot\vec{c}| \leq \varepsilon+\delta$$

$$\overline{P(b,c)} \leq -\vec{b}\cdot\vec{c} + \varepsilon + \delta$$

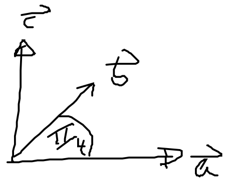
$$1 + 2(\varepsilon+\delta) - b\cdot c \geq 1 + \varepsilon + \delta + \overline{P(\vec{b},\vec{c})}$$

$$\geq |\vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{b}| - 2(\varepsilon+\delta)$$

$$4(\varepsilon+\delta) \geq |\vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{b}| + \vec{b}\cdot\vec{c} - 1$$

(eigentliche Bellsche Ungleichung)

Beispiel:



$\vec{a}\cdot\vec{c} = 0$ $\qquad |a| = 1$, $|b| = 1$, $|c| = 1$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$4(\varepsilon+\delta) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

δ beliebig kleine Variation von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$
ε nicht gegen null

$\Longrightarrow$ nicht jeder Ansatz für $P(a,b)$ reproduziert den qm. Mittelwert

Bell (1965) konstruiert Widerspruch zwischen quantenmechanischer Vorhersage und multiplikativer, d.h. separabler HVT (lokal)

$\Rightarrow$ wenn wir eine HVT suchen,
dann nicht lokale Kommen
in Frage (nicht multiplikativ)

aufgrund welcher Annahmen von Bell

(i) $A_\lambda(a) = \pm 1$, $B_\lambda(b) = \pm 1$

(ii) $A_\lambda(a) = - B_\lambda(a)$

(iii) $P(a,b) = \int d\lambda\, \rho(\lambda)\, A_\lambda(a)\, B_\lambda(b)$

---

nächste Schritte: (1.) Voraussetzung (ii) fallen lassen CHSH-Ungleichung

(2.) Voraussetzung (i) abschwächen
$\rightarrow$ B-CHSH-Ungleichung

(3.) B-CHSH Ungleichung ist endlich praktikabel
$\rightarrow$ Aspect-Experiment