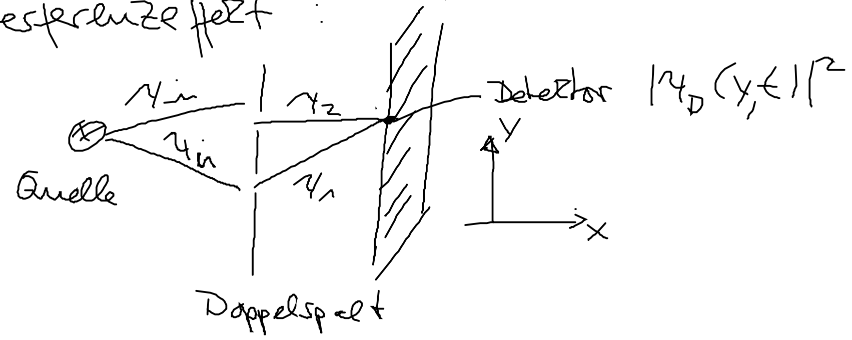
Aharonov-Bohm-Effekt: (heuristische Herleitung)

[„Significance of electromagnetic potentials in quantum theory" Phys. Rev. 115, 485 (1959)]

Interferenzeffekt:



$$|\psi_D(y,t)|^2 = |\psi_1(r,t) + \psi_2(r,t)|^2 \quad \text{(Huygens Prinzip)}$$

$$= |c_1 e^{i\varphi_1} + c_2 e^{i\varphi_2}|^2$$

seien die Schlitze identisch (im Mittel) $c_1 = c_2$

$$|\psi_D(t,y)|^2 = |c|^2 \, |e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2}|^2$$

$$= |c|^2 \, |e^{i\varphi_1/2} \, (e^{i\varphi_1/2} + e^{i\varphi_2 - i\varphi_1/2})|^2$$

$$= |c|^2 \, |e^{i(\varphi_1-\varphi_2)/2} + e^{i(\varphi_2-\varphi_1)/2}|^2 = |2c|^2 \cos^2\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)$$

(1.) freie Bewegung unseres Partikel

$$\psi_1(\vec{r}_1,t) = c_1 e^{i/\hbar \, \vec{p}_1 \cdot \vec{r}_1} \qquad \vec{p} = \hbar |\vec{k}_1| \vec{e}_x$$

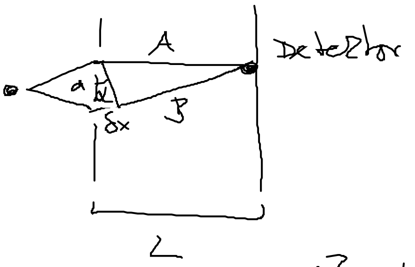
$$i\varphi_1 = \frac{i}{\hbar} \vec{p}_1 \cdot \vec{s}_1 \to \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} s_1$$

(löst unsere freie Schrödingergl.)

(2) einlaufende ψ_{in} besitzt selbe Phase

$$|k_1| = |k_2|$$

(3.) Phasenunterschied nur durch Gangunterschied erzeugt



$$\delta x = d \sin \alpha$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(s_1 - s_2) = \frac{2\pi}{\lambda}\delta x$$

$$d^2 + L^2 = (\delta x + L)^2$$

$$\delta x = -L \pm \sqrt{d^2 + L^2}$$

$\delta x > 0$ $$\delta x = \sqrt{L^2 + d^2} - L \geq 0$$

$$= L\left(\sqrt{1 + \left(\tfrac{d}{L}\right)^2} - 1\right)$$

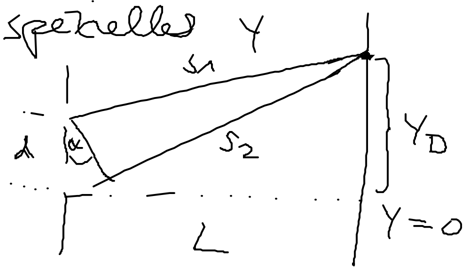
$\sqrt{1+\varepsilon^2}$ für kleine $\varepsilon^2 = \frac{d^2}{L^2}$

$$\sqrt{1+\varepsilon^2} \simeq 1\Big|_{\varepsilon=0} + \frac{1}{2}(1+\varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}} 2\varepsilon\Big|_{\varepsilon=0} \frac{\varepsilon}{1!}$$
$$+ \left[\varepsilon\left(-\tfrac{1}{2}\right)(1+\varepsilon^2)^{-\frac{3}{2}} 2\varepsilon + (1+\varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}}\right]\frac{\varepsilon^2}{2!}$$

$= 1 + \frac{\varepsilon^2}{2}$, d.h. $$\delta x = L\left(\sqrt{1 + \frac{d^2}{L^2}} - 1\right)$$
$$\simeq L\left(1 + \frac{1}{2}\frac{d^2}{L^2} - 1\right) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{L}$$

für spezielles Y

(5.)



$d \ll L$

$$\delta x = \frac{Y_D\, d}{L} - \mathcal{O}(d^2)$$

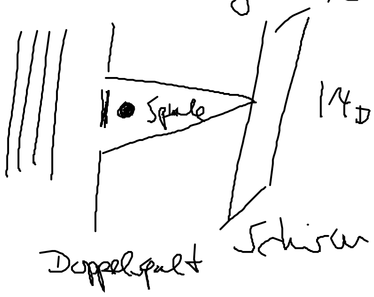
(6.) $$|\psi_D(Y_D, t)|^2 = |2c|^2 \cos^2\left[\frac{\pi}{L}\frac{Y_D\, d}{\lambda}\right]$$

Maximas nur bei diskreten y_D, und zwar, wenn $y_D = n \lambda \frac{L}{d}$

<u>Frage</u>: was passiert, wenn es ein nicht verschwindendes Vektorpotential gibt?

Bewegung nicht mehr.

Schrödinger lautet nun $i\hbar \partial_t \psi = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 \psi$



$|\psi_D|^2 = ?$

$$|\psi|^2 = |\psi' e^{i\varphi}|^2 = |\psi' e^{i\varphi(r,t)}|^2$$

Eichinvarianz der Schrödingergleichung ist spektakulär: Ladungserhaltung

Wir setzen $\psi_D'(r,t) = \psi_D(r,t) \exp[i\chi(r)]$

$$\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A} + \frac{\hbar}{q} \nabla_{\vec{r}} \chi(\vec{r}) \qquad (\nabla \times A = \nabla \times A' = \vec{B})$$

$$\chi(\vec{r}) = -\frac{q}{\hbar} \int_0 d\vec{r}' \cdot \vec{A}(\vec{r}') \qquad [\vec{r}' = (x', y', z')]$$

$$= -\frac{q}{\hbar} \left[\int_0^{r_x} dx' A_{x'}(\vec{r}') + \int_0^{r_y} dy' A_{y'}(\vec{r}') + \dots \right]$$

$$\nabla \chi(\vec r) = -\frac{q}{\hbar}\vec A(\vec r)$$

$$\boxed{i\hbar\,\partial_t \psi_D = \frac{1}{2m}(p - q\vec A)^2\psi_D \longrightarrow i\hbar\,\partial_t\psi_D' = \frac{1}{2m}(\vec p - q\vec A')\psi_D'}$$

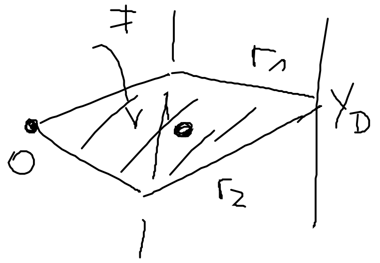
$$\vec A' = 0$$

Ausgangspunkt: $i\hbar\,\partial_t\psi_D' = \frac{\vec p^{\,2}}{2m}\psi_D'$

$$\psi_D(\vec r_1, t) = c_1 \exp\left[\frac{i}{\hbar}\vec p_1\cdot\vec r_1 - i\frac{q}{\hbar}\int_0^{r_1} d\vec r\,'\cdot\vec A(\vec r\,')\right] + (1\to 2)$$

$c_1=c_2$

$$= c\, e^{-\frac{i}{\hbar}q\int_0^{r_2} d\vec r\,'\cdot\vec A(\vec r\,')}\left[e^{\frac{i}{\hbar}\vec p_1\cdot\vec r_1 - \frac{i}{\hbar}q\left\{\int_0^{r_1} d\vec r\,'\cdot\vec A(\vec r\,') - \int_0^{r_2} d\vec r\,'\cdot\vec A(\vec r\,')\right\}} + e^{\frac{i}{\hbar}\vec p_2\cdot\vec r_2}\right]$$



geschlossener Weg, weil r_1 und r_2 bei O anfangen und beim Detektor enden

$$|\psi_D(y_D)|^2 = |c|^2 \left| e^{\frac{i}{\hbar}\vec p_1\cdot\vec r_1 - \frac{i}{\hbar}q\oint d\vec r\,'\cdot\vec A(\vec r\,')} + e^{\frac{i}{\hbar}\vec p_2\cdot\vec r_2}\right|^2$$

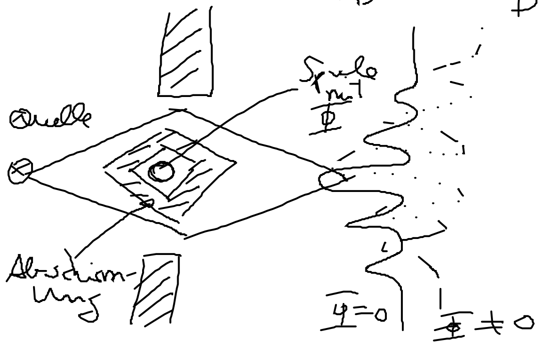
$$\oint_{\partial F} d\vec r\,'\cdot\vec A(\vec r) = \int_F d\vec f\cdot\nabla\times\vec A = \int d\vec f\cdot\vec B = \Phi$$

$$\left(= \int_F d\vec f\cdot\nabla\times\vec A' = \Phi\right)$$

$$|\psi_D(y_D)|^2 = |2c|^2\cos^2\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2-\frac{q}{\hbar}\Phi}{2}\right)$$

$\Longrightarrow$ Maxima werden verschoben um $\Delta\varphi_B = -\frac{q}{\hbar}\Phi$

$$y_n = n\lambda \frac{L}{D} + \frac{q}{\hbar}\Phi$$



verschiebt sich proportional zum Strom durch die Spule

(Tonomura 1984)

(i) Interferenzeffekt unabhängig von direktem Magnetfeldeinfluss (nichtlokaler Effekt)

(ii) Verschiebung aber unabhängig von gewählter Eichung.
was gemessen wird ist $\Phi = \int_F d\vec{f}\cdot\vec{B} = \oint_{\partial F} d\vec{r}\cdot\vec{A}(\vec{r})$

(iii) wenn $\frac{q}{\hbar}\Phi = n\pi$, dann verschwindet der Shift $\Delta\varphi_B = 0$, d.h. der AB-Effekt <u>dient</u> als Stromstärke Normal, denn $\Phi = \int_F d\vec{f}\cdot\vec{B}$ hängt vom Strom ab

verwandt mit dem SQUID (superconducting quantum interference device)

<u>Probleme</u>:
- wie sieht Vektorpotential der idealisierten Spule?
- kann bei bekanntem Vektorpotential eine geeignete Eichung finden?

$\longrightarrow$ ursprüngliche Rechnung von Aharonov und Bohm (idealisierte Spule)

- wie sieht eine realistische Spule (das ist der Horror)?
- wichtig für die Interpretation