Perkolationstheorie II

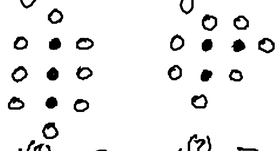
Erkenntnisse zu Perkolation bisher:

- Geometrischer Phasenübergang aus Zufallsprozess (als Modell für 'random media'), getrieben durch Besetzungswahrscheinlichkeit/-konzentration eines Gitters ('bond', 'site') oder eines Raums / einer Fläche (Kontinuumsperkolation)
- Interessante Größen, die Perkolationsübergang charakterisieren, weisen Skalenverhalten mit krit. Exponenten auf:
  - Stärke Θ des ∞ Clusters ist Ordnungsparameter
    $\Theta \sim (p - p_c)^{\beta}$ (vgl. spontane Magnetis. $m \sim (T_c - T)^{\beta}$)
    p_c: Perkolationsschwelle
    (p_c hängt von Gittertyp / Perkol.-modell ab, aber krit. Expon. nur von Raumdimension) $\rightarrow$ Universalität
  - Mittlere Clustergröße S (Stärke) (endl. Cluster):
    $S \sim |p - p_c|^{-\gamma}$ divergiert bei Annäherung an p_c (von oben u. unten)
  - Korr.-fkt. $\hat{=}$ Wahrsch., dass zwei Plätze mit Abstand r zum selben Cluster gehören, w_r, fällt bei p_c nicht mehr exponentiell ab, sondern algebraisch ('power law'), da Korrelationslänge ξ divergiert:
    $\xi \sim |p - p_c|^{-\nu}$ ($\nu = 1$ für $d = 1$)
  - Clustergrößenverteilung (endl. Cluster)
    $n_s(p_c) \sim s^{-\tau}$ statt expon. Zerfall mit s für $p < p_c$
  - Perkolierender Cluster ist selbstähnlich (fraktal), d.h. Stärke Θ skaliert mit linearer Abmessung L
    $\Theta \sim L^{d_f}$, $d_f < d$

Zum Abzählungsproblem für n_s auf „gewöhnlichen" Gittern mit $d>1$:

Essentiell für Bestimmung von n_s war die Zahl t_s der begrenzenden leeren Plätze eines s-Clusters (z.B. $t_s=2$ $\forall s$ in $d=1$).
In $d>1$ hängt t_s nicht nur von s ab, sondern auch von Form/Kompaktheit der Realisierung ab:

$s=3$ auf Quadratgitter:



Für größere s außerdem 'Loops' möglich

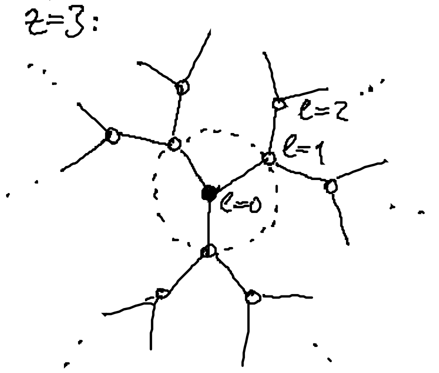
$t_3^{(1)}=8 \qquad t_3^{(2)}=7$

→ Alle Clusterkonfig. C_s mit s Plätzen („Gittertiere") müssen inklusive ihres statist. Gewichts und t_s bestimmt und separat behandelt werden. → Interessantes Regime großer s praktisch nicht zugänglich.

11.6 Bethe-Gitter / Cayley tree

Jeder Platz hat z nächste Nachbarn, Baumstruktur: keine geschlossenen Wege

$z=3$:



ℓ-te Schale hat $S_\ell = z(z-1)^{\ell-1}$ Plätze, ℓ Schalen haben

$$V_\ell = 1 + z\sum_{m=0}^{\ell-1}(z-1)^m = \dots \text{ (geom. Reihe)} = \frac{2-z(z-1)^\ell}{2-z}$$

→ S_ℓ, V_ℓ wachsen exponentiell mit ℓ!

⇒ „Oberfläche"/„Volumen" $$S_\ell/V_\ell = \frac{2-z}{\frac{2}{z(z-1)^{\ell-1}}+1-z} \xrightarrow[\ell\to\infty]{(z\geq 3)} \frac{z-2}{z-1}$$

(z.B. $z=3$: Hälfte d. Plätze in S_ℓ für $\ell\to\infty$)

Zum Vgl.:
Für d-dim. Kugel $S_d \sim R^{d-1}$, $V_d \sim R^d \Rightarrow S_d \sim V_d^{1-1/d}$

Proportionalität $S_d \sim V_d$ für $R \to \infty$ wird nur für $d \to \infty$ erreicht.
Daher wird Bethe-Gitter auch für Spin-Modelle oft als „Ersatz" für „∞-dim. Gitter" verwendet. (Erinnerung: z.B. für Ising-Modell mit ∞ langreichw. WW: Mean-Field-Näherung wird exakt.)

Perkolation auf ~~Bethe-Gitter~~:

i) Perkol.-schwelle p_c aus Korr.-fkt. ω_r (W., dass z.B. ~~Zentrum~~ mit Platz in r-ter Schale verbunden ist):

$$\omega_r = p^r \underbrace{z(z-1)^{r-1}}_{\#\text{Plätze r-te Schale}}$$

$$= \frac{z}{z-1}\left(p(z-1)\right)^r$$

$$= \frac{z}{z-1} e^{r \ln(p(z-1))}$$

$\Rightarrow$ Korr.-länge $\xi = \frac{-1}{\ln(p(z-1))}$ divergiert für $p \to p_c = \frac{1}{z-1}$ (Erinn.: $p_c = 1$ für $z = 2 \mathrel{\hat=}$ 1d Kette)

wieder krit. Expon. $\nu = 1$

ii) Stärke Θ des ∞ Clusters:

Wahrsch., dass Zentrum ~~besetzt~~ ist und zum ∞ Cluster gehört, ist $p\,\Theta \mathrel{\hat=}$ Wahrsch., dass es besetzte Verbindung bis zu $r \to \infty$ gibt (zu S_∞)

Q Wahrsch., dass es von (besetztem) Platz keine Verbindung nach S_∞ gibt:

$$Q = \underbrace{1-p}_{\text{nächster Platz ist selbst nicht besetzt}} + p\, \underbrace{Q^{z-1}}_{\text{keiner der (z-1) Zweige hat Verbind. nach } S_\infty}$$

Lsg. für $z=3$: $Q_a = 1$ (für $p < p_c$)
und $Q_b = \frac{1-p}{p}$

Zurück zu Θ:
Wahrsch., dass Zentrum besetzt, aber ohne Verbindung zu S_∞, $r \to \infty$, ist, ist $p(1-\Theta)$, andererseits auch pQ^z:
$\Theta = 1 - Q^z$

Wieder für $z=3$: $\Theta_a = 0$ $(p<p_c)$

$$\Theta_b = 1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^3$$

$\Rightarrow$ (ohne Herleit.) $(p_c = 1/2)$

$$\Theta \sim (p-p_c) \qquad (\beta = 1)$$

iii) Clustergrößenverteilung:
t_s, Zahl d. leeren Nachbarplätze, hängt für Bethe-Gitter nur von s ab, nicht von Topologie d. s-Clusters, also:
$t_1 = z$, $t_2 = 2(z-1)$ (Endplätze haben $z-1$ N., Mittelplätze auf lin. Cluster $z-2$)

$$t_s = 2(z-1) + (s-2)(z-2)$$
$$= 2 + s(z-2)$$

Daraus n_s:

$$\underset{(p)}{n_s} = g_s (1-p)^{t_s} p^s = g_s (1-p)^2 (1-p)^{s(z-2)} p^s$$

g_s: statist. Gewicht s-Cluster

Um Berechnung von g_s zu umgehen, bilden wir

$$\frac{n_s(p)}{n_s(p_c)} \underset{z=3}{=} \left(\frac{1-p}{1-p_c}\right)^2 \left[\frac{p(1-p)}{p_c(1-p_c)}\right]^s \qquad \left(\text{Voraussetzung: } n_s(p_c) \sim s^{-\tau}\right)$$

$$= \left(\frac{1-p}{1-p_c}\right)^2 \left[1 - a(p-p_c)^2\right]^s$$

$\sim e^{-cs}$ mit $a=4$,

$c = -\ln\{1-a(p-p_c)^2\}$

$\Rightarrow$ Exponent. Zerfall $\forall s$, nicht nur für große s wie bei „gewöhnlichen" Gittern

$\Rightarrow$ Skalenfkt., da

$cs \sim s(p-p_c)^2$ hängt nur ab von „skalierter" Clustergröße

$s(p-p_c)^{1/\sigma}$, hier $\sigma = 1/2$

$\rightarrow$ „Selbstähnlichkeit" d. Clustergrößenverteil.

Mit $n_s(p_c) \sim s^{-\tau}$

kann man über die mittlere Clustergröße S zeigen:

$S \sim c^{\tau-3} = (p-p_c)^{\frac{\tau-3}{\sigma}}$

$\sim |p-p_c|^{-\gamma}$ (früher) $\Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{3-\tau}{\sigma}}$ Skalenrelation

Analog aus Θ und

$1 = 1-p+\sum_s' m_s + p\Theta \rightsquigarrow \Theta = 1-\frac{1}{p}\sum_s' m_s$,

$\Theta \sim (p-p_c)^\beta \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{\tau-2}{\sigma}}$