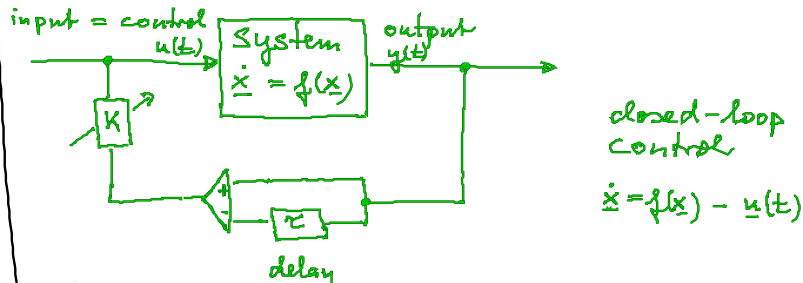


English Summary:

Time-delayed feedback control:



$$u(t) = K [y(t) - y(t-\tau)]$$

Pyragas (1992): chaos control (non-invasive)

### 2.2.1 Stabilisierung instabiler Fixpunkte durch zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle

Allg. Form eines 2-Var.-Systems (ohne Kontrolle)

Fixpt.  $\underline{x}^*$  :  $0 = \dot{\underline{x}} = f(\underline{x}^*) \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^2$

Linearisierung um  $\underline{x}^*$  für kleine Störungen:

$$\underline{x}(t) = \underline{x}^* + \delta \underline{x}(t) :: \delta \dot{\underline{x}} = (Df)_{\underline{x}^*} \delta \underline{x}$$

Jacobi-Matrix  $(Df)_{\underline{x}^*} \equiv A$

lös.  $\delta \underline{x} \sim e^{\lambda t}$  :  $0 = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A}}{2}$$

Normalform eines instab. Fokus  $\Lambda = \lambda \pm i\omega \quad (\lambda > 0)$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \omega \\ -\omega & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

komplexe Schreibweise  $\dot{z} = (\lambda \pm i\omega)z$ ,  $z = x \mp iy \in \mathbb{C}$   
mit zeitverzögerter Rückkopplung

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \omega \\ -\omega & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - K \begin{pmatrix} x(t) - x(t-\tau) \\ y(t) - y(t-\tau) \end{pmatrix}$$

"diagonale Rückkopplung"

$$z = (\lambda \pm i\omega)z - K(z(t) - z(t-\tau))$$

Ansatz  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim e^{\lambda t}$

char. gl.  $0 = \det \left[ \begin{pmatrix} \lambda - \Lambda & \omega \\ -\omega & \lambda - \Lambda \end{pmatrix} - K \begin{pmatrix} 1 - e^{-\Lambda\tau} & 0 \\ 0 & 1 - e^{-\Lambda\tau} \end{pmatrix} \right]$

$$= [\Lambda + K(1 - e^{-\Lambda\tau}) - \lambda]^2 + \omega^2$$

$$\Leftrightarrow [\dots]^2 = -\omega^2$$

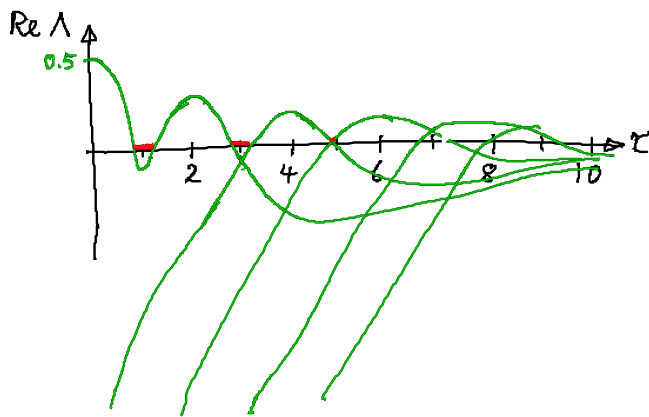
$$\Leftrightarrow \boxed{\Lambda + K(1 - e^{-\Lambda\tau}) = \lambda \pm i\omega}$$

Lösung durch Lambertfkt.  $\underbrace{(\Lambda + K - (\lambda \pm i\omega))\tau}_{\tilde{z}} = K\tau e^{-\Lambda\tau}$

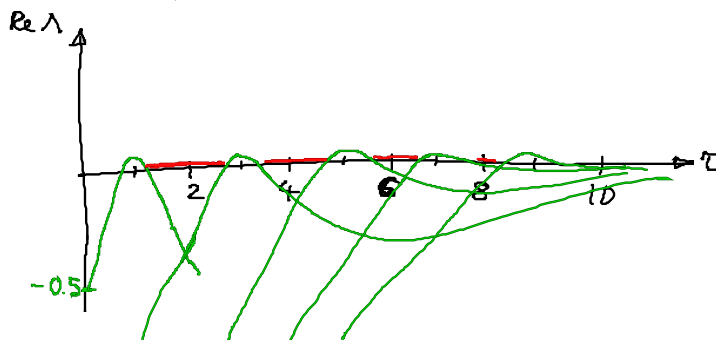
$$\tilde{z} e^{\tilde{z}} = K\tau e^{-(\lambda \pm i\omega)\tau + K\tau} \quad \begin{matrix} \tilde{z} e^{\tilde{z}} = y \\ \tilde{z} = W_2(y) \end{matrix}$$

$$\Lambda\tau = W_2(K\tau e^{-(\lambda \pm i\omega)\tau + K\tau}) + (\lambda \pm i\omega)\tau - K\tau$$

natürliche Zeitskala  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$  (Osz. periode ohne Delay)



unkontrolliert:  
 Fixpt. instabil ( $\lambda > 0$ )  
 $\lambda = 0.5, \omega = \pi, K = 0.3$   
 $\Downarrow$   
 $T_0 = 2$

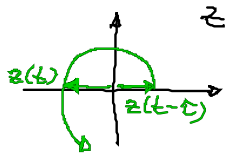


kontrolliert:  
 Fixpt. stabil ( $\lambda < 0$ )  
 $\lambda = -0.5, \omega = \pi, K = -0.3$

nichtmonotones Verhalten der Eigenmoden  
 $\text{Re } \lambda$  als Fkt. von  $\tau$  führt abwechselnd  
 zur Stabilisierung / Destabilisierung

Stabilitätsunkehr bei  $\tau \approx \frac{2n+1}{2} T_0$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ )

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2$$



Stabilitätsgrenzen

char. gl.  $\lambda + K(1 - e^{-\lambda\tau}) = \lambda \pm i\omega$

$\text{Re } \lambda = 0$  :

char. gl. in Re und Im aufgespalten, mit  $\lambda = p + iq$  :

$$\begin{aligned} \lambda &= p + K[1 - e^{-p\tau} \cos q\tau] & \lambda > 0 \\ \omega &= q + K e^{-p\tau} \sin q\tau \end{aligned}$$

$$\text{Re } \lambda = p \stackrel{!}{=} 0 : \lambda = K(1 - \cos q\tau) \quad (1)$$

$$\omega = q + K \sin q\tau \quad (2)$$

Systempar.:  $\lambda, \omega$  geg.

Kontrollpar.:  $K, \tau > 0$

Kurvenpar. der Stab. grenze im  $(K, \tau)$ -Raum :  $q$

$$(1) \Rightarrow 0 \leq 1 - \cos q\tau \leq 2 \Rightarrow \frac{\lambda}{K} \leq 2 \Rightarrow K \geq \frac{\lambda}{2}$$

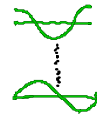
notwendige Bed. für Stabilisierung  
 (minimale Rückkopplungsstärke)

$$K_{\min} = \frac{\lambda}{2} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \cos q\tau = -1 \Rightarrow q\tau = (2n+1)\pi \quad (3)$$

$$n=0, 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow \sin q\tau = 0 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} q = \omega$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{\pi}{\omega} (2n+1) = T_0 \frac{2n+1}{2} \quad n=0, 1, 2, \dots$$



Für  $\tau = \frac{2\pi n}{\omega} = nT_0$  ist keine Stabilisierung möglich, weil

$$(2) \Rightarrow q = \omega \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{K-1}{K} = \cos(q\tau) \stackrel{q\tau=2\pi n}{=} 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{K} = 1$$

Analyt. Berechnung der Stabilitätsgrenze in der  $(K, \tau)$ -Ebene :

$$(1), (2) \Rightarrow \left(\frac{K-2}{K}\right)^2 + \left(\frac{\omega-q}{K}\right)^2 = \cos^2 q\tau + \sin^2 q\tau = 1$$

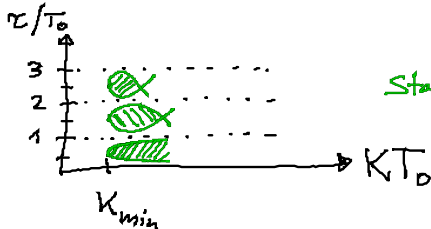
$$\Rightarrow \omega - \eta = \pm K \sqrt{1 - \left(\frac{K-2}{K}\right)^2}$$

$$\eta = \omega \mp \sqrt{(2K-2)\lambda} \quad \text{eliminiert aus (1), (2)}$$

feste Par.  $\lambda, \omega$  des unkontrollierten Systems

$$\Rightarrow \text{Relation zwischen } \tau \text{ und } K \text{ aus (1): } \tau(K) = \frac{\arccos \frac{K-2}{K}}{\omega \mp \sqrt{(2K-2)\lambda}}$$

arccos hat mehrere Zweige:



Stabilisierung in Stabilitätsinseln!

Hövel u. Schöll, Phys. Rev. E 72, 0620 (2005)

Erweiterung (Socolar, Sukow, Gauthier, PRE 50, 3245 (1994))

- multiple-time feedback (ETDAS, extended time-delay auto-synchronization)

$$K \sum_{n=0}^{\infty} R^n [x(t-n\tau) - x(t-(n+1)\tau)] \quad \text{gedächtnispar. R} \\ (0 \leq R < 1)$$

Eigenwertgl.

$$\lambda + K \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{1 - R e^{-\lambda\tau}} = \lambda \pm i\omega \quad \text{Stab. bereich} \\ \text{vergrößert}$$

Dahms, Hövel, Schöll, PRE 76, 056201 (2007)

- Latenz-Effekte

$$K [x(t-\delta) - x(t-\delta-\tau)] \quad \text{Latenzzeit } \delta$$

Stab. bereich verkleinert

- phasen-abhängige Rückkopplung  $K e^{i\varphi}$

$$K \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) - x(t-\tau) \\ y(t) - y(t-\tau) \end{pmatrix}$$

- asymptot. Skalierungsverhalten für große  $\tau$

Yanchuk, Wolfrum, Hövel, Schöll, PRE 74, 026201 (2006)

Wolfrum et al., EPJ-ST 191, 91 (2010)