

English Summary:

Stabilization of unstable periodic orbits

$$\dot{z} = (\lambda + i\omega + (1+ix)|z|^2)z + b(z(t-\tau) - z(t)) \quad \begin{matrix} z \in \mathbb{C} \text{ (subst. Hopf)} \\ b \in \mathbb{C} \text{ bif} \end{matrix}$$

Floquet exp. $\Lambda \in \mathbb{C}$: $\Lambda + K(1 - e^{-\Lambda\tau}) = \lambda + i\omega$ for diagonal control
 ($b = K \in \mathbb{R}$)

3. Gekoppelte Systeme und Netzwerke

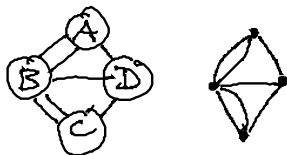
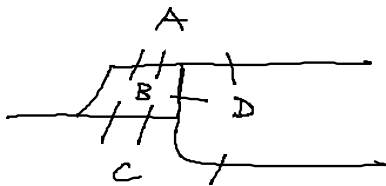
Betrachte N gekoppelte Elemente \rightarrow dynamisches Netzwerk

Kopplung: links (Kanten eines Graphen, edges)

Elemente: nodes (Knoten) im Netzwerk (vertices)

- Topologie: Welche Knoten sind gekoppelt?
- Kopplungsschema: wie sind die Knoten gekoppelt (welche Variable)?

z.B. Königsberger Brückenproblem - gelöst von Euler 1735



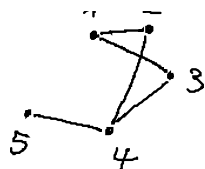
Gibt es einen Weg, der jede Brücke nur einmal besucht?

Antwort: Nein

Knoten mit ungerader Anzahl von (Ordnung) dieser nur Start oder Endpunkt sein.

3.1.1 Topologie des Netzwerkes

1 2



$N \times N$ Matrix, N Zahl der Knoten

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hier: nicht gerichtete
Kopplung (bidirektional)

\downarrow
A symmetrisch

A adjacency matrix (Nachbarschafts-
matrix)

$$a_{ij} = 1, \text{ falls Kopl. } i \leftrightarrow j \\ = 0 \text{ sonst}$$

Erweiterung auf gerichtete Kopplung $i \leftarrow j \Rightarrow$ A nicht mehr
symmetrisch

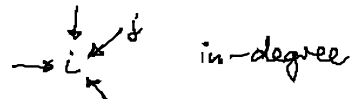
" auf gerichtete Kopplungen $\Rightarrow a_{ij}$ nicht nur
auf Werte 0 oder 1
beschränkt

\downarrow
statt von A spricht man
von Kopplungsmatrix G

g_{ij} : Stärke der Kopplung
($g_{ij} \in \mathbb{R}$)

Charakterisierung der Topologie durch bestimmte Kenngrößen:

Knotenordnung: $k_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ (Zahl der angekoppelten Elemente)
(degree of node)



Verteilung von k: $P(k)$ Wahrscheinlichkeit, einen Knoten
(degree distribution) mit Ordnung k zu finden

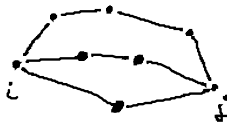
mittlere Knotenordnung $\langle k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} P(k) k$
(average degree)

mittlere Pfadlänge (globale Eigenschaft)

$$l = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i < j} d_{ij} \quad N(N-1) = \text{max. Zahl der Links}$$

kürzeste Verbindung zweier Knoten:

$$d_{ij} = \min_{P_{ij}} \sum_{k, l \in P_{ij}} a_{kl}$$



$$P_{ij} := \{ \text{Pfade zwischen } i \text{ und } j \}$$

Clusterkoeffizient (lokale Eigenschaft, $0 < C_i < 1$)
Cliquenbildung

$$C_i = \frac{1}{\frac{k_i(k_i-1)}{2}} \sum_{j,k} a_{ij} a_{ik} a_{jk}$$

Anzahl der max. möglichen Dreiecke, die i enthalten Anzahl von angrenzenden Dreiecken

Beispiel:

$$C_3 = \frac{1}{3} \quad C_6 = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$k_i = 6, \quad \frac{6 \cdot 5}{2} = 15 \text{ mögl. } \Delta$

Einbettung (betweenness) (Wichtigkeit des Knoten)

Anzahl der Pfade, die durch den Knoten laufen

Closeness: inverse mittlerer Abstand von allen anderen Knoten

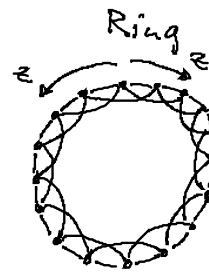
Mischungsmuster: Netzwerke mit verschiedenen Knotensorten

- assortative mixing: Präferenz für Verbindung gleicher Knoten
- disassortative mixing: Präferenz für Verbindung ungleicher Knoten

- Beispiele :
- soziales Netz (Freundschafts-Netz)
 - ökolog. Netzwerke (Räuber-Beute-Netz)
 - ökonom. Netzwerke (Banken, Finanzmärkte)
 - technolog. Netzwerke (Internet, WWW)
Verkehrswerte, Stromnetze)
Smart power grids
 - biolog. Netzwerke (genet. regulierende Netzwerke)
 - neuronale Netzwerke (Gehirn: 10^{11} Neuronen
 10^{14} links)

Beispiel 1 : Reguläres Netzwerk

- Jeder mit jedem der $m=2z$ nächsten Nachbarn verbunden
 - konstante Knotengrad $k_i = 2z = \langle k \rangle$
 - degree distribution $P(k) = \delta_{k, 2z}$
 - mittl. Pfadlänge $l \sim N^{1/d}$
 - Clusterkoeff. $C = \frac{3 \cdot \frac{k}{2} (z-1)}{2k(z-1)}$
(groß, ≤ 1)



Dim. des Gitters $d=1$
 $z=2$ (Verbindungen
 zu allen 1. und 2. Nachbarn)
 nichtlokal

Beispiel 2 : zufälliges Netzwerk
 (Erdős-Rényi 1960)

Anfangsgraph. : globale Kopplung (all-to-all),
 vollständiger Graph
 $\frac{N(N-1)}{2}$ links

Jetzt: jeder Link ex. mit Wahrscheinlichkeit p

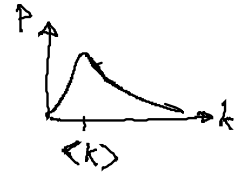
→ Degree distribution, $P(k) = \frac{\langle k \rangle^k e^{-\langle k \rangle}}{k!}$
(Poisson-Statistik)

– mittlere Knotenordnung $\langle k \rangle = p(N-1)$

– mittlere Pfadlänge $l = \frac{\ln N}{\ln \langle k \rangle}$
(klein bei großem $\langle k \rangle$, wächst nur langsam)

– Clusterkoeff. $C = \frac{\langle k \rangle}{N} \approx p$

(→ 0 für große N und endl. $\langle k \rangle$)



Beispiel 3: Kleine-Welt-Netzwerke (small world)

regulär

Kleine Welt

zufällig

(Watts-Strogatz)

