English Summary

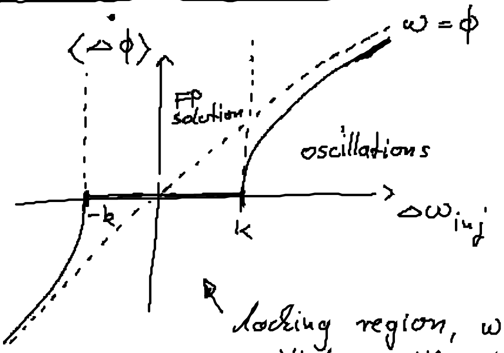
- Phase oscillator ϕ with injection of a periodic signal ϕ_{inj}

$$\boxed{\Delta\dot{\phi} = \Delta\omega_{inj} - k \sin\Delta\phi}$$

(Output) $\Delta\phi = \phi - \phi_{inj}$

(Input) $\Delta\omega_{inj} = \omega - \omega_{inj}$

Adler equation



$$k = \frac{K}{|A|} = \frac{|\mathcal{E}_{inj}|}{\tau |A|}$$

locking region, where driven oscillator (slave) oscillates with driving frequency $\dot{\phi}_{inj} = \omega_{inj}$

- inside locking region $\phi(t) \sim e^{i\omega_{inj} t}$

- Class A laser with optical injection

$$\dot{\mathcal{E}} = i\omega\mathcal{E} + \frac{1}{2}\mathcal{E}\left(\frac{P}{1+|\mathcal{E}|^2} - 1\right) + \frac{|\mathcal{E}_{inj}|}{\tau} e^{i\omega_{inj} t}$$

$\Downarrow$

$$\dot{\bar{E}} = i\Delta\omega_{inj}\bar{E} + \frac{1}{2}\bar{E}\left(\frac{P}{1+|\bar{E}|^2} - 1\right) + \frac{|\mathcal{E}_{inj}|}{\tau}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{A}(t) &= \frac{1}{2}A(t)\left(\frac{P}{1+|A|^2} - 1\right) + K\cos\Delta\phi \\ \Delta\dot{\phi} &= \Delta\omega_{inj} - \frac{K}{|A|}\sin\Delta\phi \end{aligned}}$$

- usually for free running laser $\mathcal{E} = A(t)\, e^{i\omega t}$
- with injection $\mathcal{E} = \bar{E}(t)\, e^{i\omega_{inj} t} = A(t) e^{i\phi}$

$\bar{E}(t) = A(t)\, e^{i\Delta\phi}$

Equation for real valued $A(t)$ and $\phi(t)$

- Intensity dependent injection strength $k(A) = \frac{K}{|A(t)|}$
- also locking phenomena observed!

5.6.3 Halbleiterlaser mit optischer Injektion

- Modell enthält α – Faktor (Amplituden – Phasen Kopplung)
  $\hat{=}$ Frequenzshift mit Intensität
- Modell enthält Dynamik der Ladungsträger n $\hat{=}$ Abweichung von der Ladungsträgerzahl an der Schwelle (dimensionslos)

$n = \tilde{n} - n_{th}$ Injektionsstärke

$$\dot{E} = (1 + i\alpha)\, n E - i \Delta\omega_{inj} E + K$$

$$\dot{n} = \gamma \left(J - n - (1 + 2n)|E|^2 \right)$$

$K = \frac{|E_{inj}|}{\tau_{in}}$

- rotating frame vom Master

Im Prinzip sind Lösungen und Stabilität bestimmbar.

<u>Alternativ</u>: Lösungen finden durch Entwicklung in Ordnungen von K (Verhalten bei <u>kleiner</u> Injektion)

Zunächst reelle Größen einführen: $E = A(t)\, e^{i\Delta\phi}$

$\Delta\phi = \phi - \phi_{inj}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{A} &= n \cdot A + K \cos\Delta\phi & (I)\\ \dot{\Delta\phi} &= \Delta\omega_{inj} - \alpha n - \frac{K}{A}\sin\Delta\phi & (II)\\ \dot{n} &= \gamma\left(J - n - (1+2n) A^2\right) & (III) \end{aligned}}$$

Class B Laser mit Injektion

<u>Ansatz</u>:

$$A = A_0 + K A_1 + \dots$$
$$\Delta\phi = \phi_0 + K\phi_1 + \dots$$
$$n = n_0 + K n_1 + \dots$$
$$\Delta\omega_{inj} = K \Delta_1 + K^2 \Delta_2 + \dots$$

K klein

- Für $K \to 0$ muss steady state des Einzellasers herauskommen: $n_0 = 0$

Zeiten ? $\rightarrow t, Kt$

<u>Vielzeitenansatz</u>:
$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \tau}{\partial t}}_{K} \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial t} + K \frac{\partial}{\partial \tau}$$

- motiviert durch Struktur der DGL
- „ausbalancierte" Gleichungen

d.h.
$$A(t,\tau) = A_0(t,\tau) + K A_1(t,\tau) + \dots$$
...

Einsetzen in DGL System

zunächst in (I):
$$\underline{\frac{\partial}{\partial t} A_0} + \underline{K \frac{\partial}{\partial \tau} A_0} + \underline{K \frac{\partial}{\partial t} A_1} + K^2 \frac{\partial}{\partial t} A_1$$ (linke Seite)

$$= (\underline{n_0}^{=0} + \underline{K n_1})(\underline{A_0} + K A_1) + \underline{K \cos(\phi_0 + K \phi_1)}$$ (rechte Seite)

0. Ordnung in K: $\frac{\partial}{\partial t} A_0 = n_0 A_0 = 0$

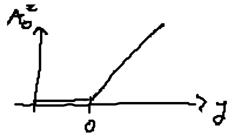
1. Ordnung in K: $\boxed{\frac{\partial}{\partial \tau} A_0 + \frac{\partial}{\partial t} A_1 = n_1 A_0 + \cos(\phi_0)}$ $*_1$

danach in (II):
$$\underline{\frac{\partial}{\partial t} \phi_0} + \underline{K \frac{\partial}{\partial \tau} \phi_0} + \underline{K \frac{\partial}{\partial t} \phi_1} + K^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \phi_1$$
$$= \underline{K \Delta_1} + K^2 \Delta_2 - \underline{\alpha K n_1} - \underbrace{\frac{K}{A_0 + K A_1}}_{= \frac{K}{A_0} \text{ in 1. Ordnung}} \sin(\phi_0)$$

0. Ordnung: $\frac{\partial}{\partial t} \phi_0 = 0$

1. Ordnung: $\frac{\partial}{\partial t} \phi_1 + \frac{\partial}{\partial \tau} \phi_0 = \Delta_1 - \alpha n_1 - \frac{1}{A_0} \sin(\phi_0)$

zuletzt in (III) : $\frac{1}{\gamma}\left(K \frac{\partial}{\partial t} n_1 + K^2 \frac{\partial}{\partial \tau} n_1\right) = J - K n_1 - (1 + 2K n_1)\left(A_0^2 + K^2 A_1^2 + 2K A_0 A_1\right)$



(Einzellaser)

0. Ordnung : $J = A_0^2 \quad \rightarrow \quad A_0 = \sqrt{J}$

$\hookrightarrow \frac{\partial}{\partial \tau} A_0 = 0 = \frac{\partial}{\partial t} A_0$

1. Ordnung : $\frac{\partial}{\partial t} n_1 = -n_1 - 2A_0 A_1 + 2 n_1 A_0^2$

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial t} n_1 = -n_1(1+2J) - 2\sqrt{J}\, A_1 \qquad \Big| \frac{\partial}{\partial t}$$

Einsetzen von $*_1$
(vorher $\frac{\partial}{\partial t}$ der ganzen Gleichung)

$$\frac{1}{\gamma}\ddot{n}_1 = -\dot{n}_1(1+2J) - 2\sqrt{J}\, \underset{\downarrow *_1}{\dot{A}_1}$$
$$= -\dot{n}_1(1+2J) - 2\sqrt{J}\left(n_1 A_0 + \cos\phi_0\right)$$

DGL mit konstanter Inhomogenität und konstanten Koeffizienten

Lösung ist bekannt

$$\Rightarrow n_1(t) = c_1 e^{-Mt} + c_2 e^{-\bar{M}t} - \frac{1}{\sqrt{J}}\cos\phi_0 \qquad (*_n)$$

- d.h. n_1 bewegt sich exponentiell zu $\boxed{-\frac{1}{\sqrt{J}}\cos\phi_0 = n_1}$
- Dynamik in τ erst in nächster Ordnung von K

Einsetzen von $(*_n)$ in $*_1$

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1 = -\frac{1}{\sqrt{J}}\cos\phi_0 \sqrt{J} + \cos\phi_0 = 0$$

- A_1 hat keine Zeitabhängigkeit von t

Phasengleichung II in 1. Ordnung : (mit $(*_4)$)

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi_1 = \Delta_1 + \left(\frac{\alpha}{\sqrt{J}}\cos\phi_0 - \frac{1}{\sqrt{J}}\sin\phi_0\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi_1 = \Delta_1 + \frac{1}{\sqrt{J}}\left(-\sqrt{1+\alpha^2}\cdot\sin\left(\phi_0 - \arctan\alpha\right)\right)$$

Rücktransformation in Größen $\Delta\phi$, $\Delta\omega_{inj}$:

$$\left[\begin{array}{l}\Delta\phi = \phi_0 + K\phi_1 \\ \Delta\omega_{inj} = K\Delta_1\end{array}\right]$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\Delta\dot{\phi} = \Delta\omega_{inj} - \sqrt{\frac{1+\alpha^2}{J}}\,K\,\sin\left(\phi_0 - \arctan\alpha\right) \\ \\ A_1 = \text{const} \\ n_1 = -\frac{1}{\sqrt{J}}\cos\phi_0\end{array}}$$

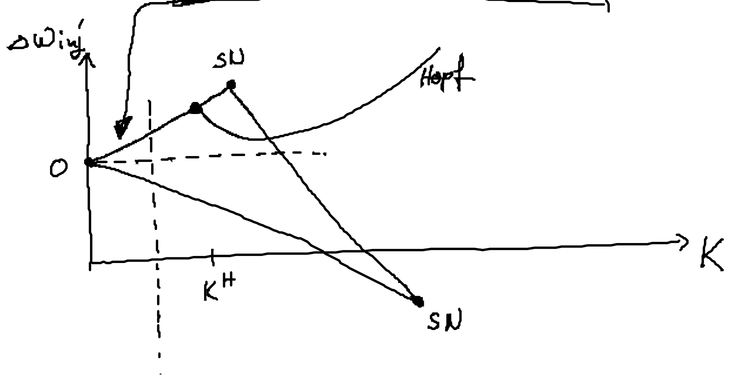
} Halbleiter Adlergleichung

Dynamik des Lasers für kleine K

=> Lockingbereich gegeben durch

$$\boxed{\sqrt{\frac{1+\alpha^2}{J}}\,K \geq |\Delta\omega_{inj}|}$$

d.h. α ändert Größe des Lockingbereiches



Gültigkeitsbereich der HL-Adler-Gleichung

→ kann zur Bestimmung von α verwendet werden

- Position der Hopflinie abhängig von der Dämpfung der RO

$$K^H \sim \frac{\Gamma_{RO}}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$