

English Summary :

(C) Local bifurcations of limit cycles

(C1) Saddle-node bif. of LC



amplitude  $\neq 0$   
frequency  $\neq 0$

(C2) Period doubling



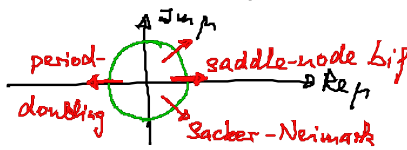
often cascade  $2^n T$   
period-doubling  
route to chaos

(C3) Sacker-Neimark bif



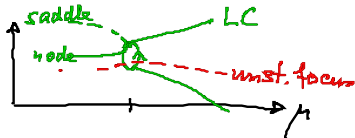
torus  
non-commensurate  
frequencies

Floquet multiplier  $\mu = e^{\lambda T}$



(D) global bif. of LC

(D1) SNIPER bif.



(D2) homoclinic bif



amplitude  $\neq 0$   
frequ.  $\rightarrow 0$

(E) Bifurcation von räumlichen Mustern

$$\dot{\underline{q}}(x,t) = \underline{F}(\underline{q}, \mu) + D \Delta \underline{q} \quad \text{Diff. konst. } D$$

lineare Stab. der Fixphte. (räuml. homogen)

$$\underline{S} \underline{q} \sim e^{\lambda t} e^{ik \cdot x}$$

⇒ Dispersionsrel  $\lambda(k)$

⇒  $\text{Re } \lambda(k) < 0$  stabil

$> 0$  instabil

$= 0$  Bif. von räuml.-period. Lösungen mit Wellenvektor  $k$

$$A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial q_j}(q^*) - D_{ij} k^2$$

(E1) Turing = Instabilität

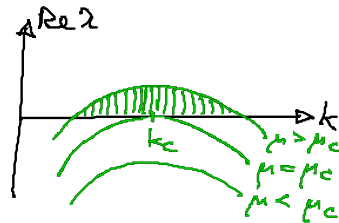
$$\lambda(k) = 0 \quad |k| = k_c \neq 0$$

stationäre, räuml. period. Struktur mit  $k_c$  bifurkiert

(z.B. langsam diffundierender Aktivator u. schneller Inhibitor)

$$\lambda(k) = \epsilon - b(k^2 - k_c^2)^2$$

$$\epsilon = \frac{\mu - \mu_c}{\mu_c}$$

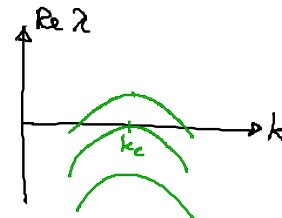


(E2) Stehende/laufende Wellen

$$\lambda(k) = \pm i\omega \quad \text{bei } |k| = k_c \neq 0$$

oszillierende, räuml. period. Struktur  
→ Wellen  $Sg \sim e^{i(k \cdot x \pm \omega t)}$

$$\lambda(k) = \epsilon - b(k^2 - k_c^2)^2 \pm i\omega$$



(E3) Hopf-Bifurkation

$$\lambda = \pm i\omega \quad \text{bei } |k| = k_c = 0$$

$$\lambda(k) = \epsilon - b(k^2)^2 \pm i\omega$$

räuml.-homog. Grenzzyklus



## 1.4 Determinist. Chaos

Determinist., aber "ungeordnete" Bewegung  
im Langzeitverhalten von Systemen mit  $n \geq 3$  (autonom):  
selbster (chaotischer) Attraktor

Kriterien zur Klassifikation:

|   |  |   |
|---|--|---|
| quasiperiod.  | determinist. Chaos                       | stochast. (Rauschen)  |
| wenige dyn. Freiheitsgrade<br>niedrig-dim. Phasenraum |  | viele mikroskop. Freiheitsgrade<br>(statist. Ensemble) $f \sim 10^{24}$ |
| Attraktor: Torus<br>$T^d$ mit $d=2,3,4,\dots$         | seltener Attraktor<br>mit fraktaler Dim. |   |

Autokorrel.fkt.  $\langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt$

period. in  $\tau$  |  $\rightarrow 0$  für  $\tau \rightarrow \infty$  |  $= 0$  für  $\tau > \tau_c$

Fourierspektrum ( bzw. spektrale Leistungsdichte  $S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t)x(t+\tau) \rangle e^{i\omega\tau} d\tau$  )  
 diskrete Frequ.  $\omega_1, \omega_2, \dots$  | power spectral density  
 breites Frequenzband

Instab. der Bewegung  
bei kleinen Störungen  
der Anfangsbed.

---

typ. universelle  
Bifurkations-szenarien

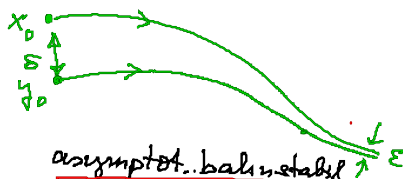
Def.: Eine Bewegung heißt chaotisch, wenn sie empfindlich von den Anfangsbedingungen abhängt.

Quantitative Formulierung der Stab. gegenüber kleinen Variationen der Anfangsbed.:

Bahnstabilität (orbitale Stabilität)

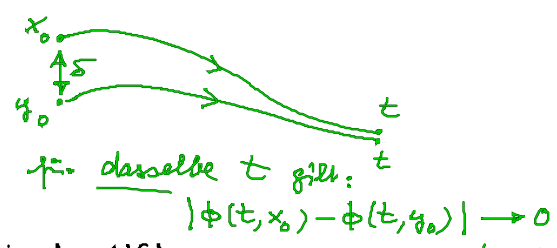


bahnstabil  
 (alle benachbarten Bahnen bleiben in einer Röhre um  $\phi(t, x_0)$ )



asymptot. bahnstabil  
 (Abstand der benachbarten Bahnen  $\rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ )

asymptot. stabil :



Linearisierung in der Nähe der Lösungskurve  $\phi(t, x_0)$ :

$$\delta \dot{x}_i = \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{\partial F_i}{\partial x_k}(x(t), t)}_{A_{i,k}(t)} \delta x_k$$

$A_{i,k}(t)$  : Eigenwerte  $\lambda_k(t)$ , Eigenvektoren  $\underline{v}^{(k)}(t)$

formale Lösung:

$$\delta x(t) = e^{\int_0^t \underline{A}(t') dt'} \delta x(0)$$

Zeitverh. einer infinitesimalen Kugel um  $x_0$   
 $\rightarrow$   $n$ -dim. Ellipsoid mit Hauptachsen  $p_k(t) \approx p_k(0) e^{\bar{\lambda}_k t}$

Def. : Stab. ist bestimmt durch die Lyapunov-Exponenten

$$\bar{\lambda}_k := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{p_k(t)}{p_k(0)}$$

NB : Führender (größter) Lyapunov-Exp.

$$\lambda := \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |x(t) - y(t)|$$

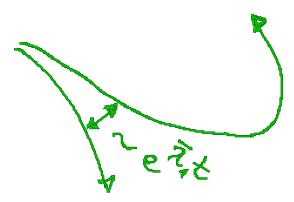
$$\Rightarrow |\phi(t, x_0) - \phi(t, y_0)| \sim e^{\lambda t}$$

$\lambda < 0$  : kleine Abweichungen der Anf. bed. exponentiell gedämpft

$\lambda > 0$  : expon. Auseinanderlaufen benachbarter Bahnen

$\hat{=}$  Def. für Chaos

chaotischer Attraktor im  $\mathbb{R}^3$  :  $\bar{\lambda}_1 > 0$ ,  $\bar{\lambda}_2 = 0$ ,  $\bar{\lambda}_3 < 0$



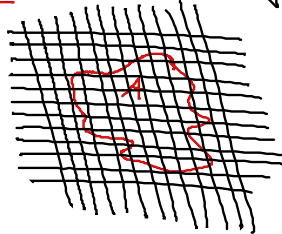
instab. Beweg. Goldstone Annäher. auf dem Attraktor (invar. Mannigf.) an den Attraktor

Quantitative Formulierung der fraktalen Dim. des seltsamen Attraktors

Verallg. Dimensionsbegriff:

Hausdorff-Dimension einer Punktmenge  $A$  im  $\mathbb{R}^n$


Sei  $N(\epsilon)$  die Mindestzahl von  $n$ -dim. Würfeln mit Seitenlänge  $\epsilon$ , um  $A$  zu überdecken.





Dann ist


$$d := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}$$

die fraktale (Hausdorff-) Dim. (d.h.  $N(\epsilon) \sim \frac{1}{\epsilon^d}$ )

Beispiel: Punkt  $N(\epsilon) = \text{const.}$    $d=0$

Linie  $N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$    $d=1$

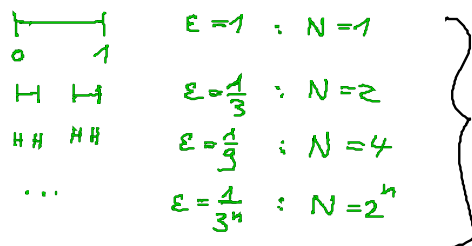
Fläche  $N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2}$    $d=2$

Vol.  $N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon^3}$    $d=3$

Chaotischer Attraktor im  $\mathbb{R}^3$ , Volumen  $\rightarrow 0$

$\Rightarrow d < 3$ ; aber  $d > 2$ : z.B. Lorenz-Modell  $d \approx 2.05...$

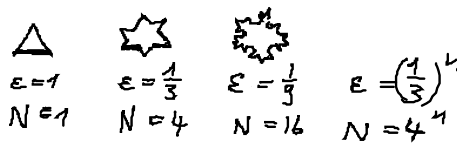
Beispiel: Cantormenge (selbstähnliche Struktur)  
hierarchisch,  $n$



$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6309...$$

Beispiel: Koch's Kurve (Schneeflocke)

Umfang  $= 3 \cdot 4 \left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow \infty$   
 $\Rightarrow d > 1$



$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3}$$

$$1 < d = 1.2618... < 2$$

(zwischen Kurve u. Fläche)

analog: Meeresküste