

English Summary

1. Dynamical systems and deterministic chaos

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}(t), t)$$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ dynamical variable

$\underline{F}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}^n$ vector field

ϕ flow of the vector field \underline{F}

$\phi: M \times \mathbb{R}_t \rightarrow M$ ensemble of all trajectories

stability of fixed points \underline{x}^* ($0 = \dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}^*)$)

$\delta \dot{\underline{x}} = (DF)_{\underline{x}^*} \delta \underline{x}$ with jacobian $(DF)_{\underline{x}^*} \equiv A$

ansatz $\delta \underline{x} = \xi e^{\lambda t}$ eigenvalues λ_i

1.2 Stabilität und Langzeitverhalten

allg. Def. von Stabilität

- Sei \underline{x}^* FP des dyn. Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, t)$ dann ist \underline{x}^* stabil (oder Ljapunow-stabil), wenn zu jeder Umgebung U von \underline{x}^* eine Umgebung V um \underline{x}^* existiert, so dass

$$\underline{x} \in V \implies \phi(\underline{x}, t) \in U \quad \forall t \geq 0$$

(Anfangspunkt)

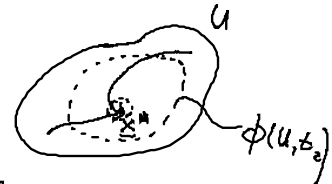


- Sei \underline{x}^* FP des dyn. Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, t)$ dann ist \underline{x}^* asymptotisch stabil, wenn zu \underline{x}^* eine Umgebung U ex.

$$\phi(U, t_2) \subset \phi(U, t_1) \subset U$$

$$0 < t_1 < t_2$$

$$\text{und } \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(\underline{x}, t) = \underline{x}^* \quad \forall \underline{x} \in U$$



(U schrumpft mit wachsendem t auf \underline{x}^* zusammen
d.h. Phasenraumvolumina schrumpfen

widerspricht Liouville'schem Satz für hamiltonsche Systeme)

► Ein dynamisches System heißt dissipativ wenn Phasenraumvolumina schrumpfen (kontrahieren).

Kriterium für (Lyapunow) Stabilität (lokal):

Wenn x^* stabil ist, dann hat keiner der Eigenwerte der Jacobi-Matrix $(DF)_x$ einen pos. Realteil.

Beispiel: Fixpunkt a) ($\varphi=0$) des Pendels mit/ohne Reibung

Hinreichende Bedingung für asymptotische Stabilität

Alle Eigenwerte haben negative Realteile.

Bsp: Fixpunkt a) des Pendels mit Reibung

Bsp: Instabile FP: b) ($\varphi=\pi$)

Allg. Systeme $n=2$

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$$

$$0 = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \underbrace{A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}}_{\det A} - \lambda(A_{11} + A_{22}) + \lambda^2 = \det A - \operatorname{tr} A \lambda + \lambda^2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (\operatorname{tr} A \pm \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A})$$

$$\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

$$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\operatorname{tr} A = \sum_i \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right)_* = \operatorname{div} E$$

Fallunterscheidung

(a) Stabiler Fokus: $\operatorname{tr} A < 0$, $\det A > 0$
 $(\operatorname{tr} A)^2 < 4 \det A$

$$\lambda_{1,2} = -\lambda_0 \pm i\omega \quad (\lambda_0, \omega > 0) \text{ gedämpfte Osz. im Phasenraum}$$



(b) Instabiler Fokus: $\operatorname{tr} A > 0$, $\det A > 0$
 $(\operatorname{tr} A)^2 < 4 \det A$

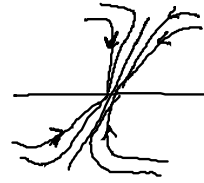
$$\lambda_{1,2} = +\lambda_0 \pm i\omega \quad (\lambda_0, \omega > 0) \text{ entdämpfte Osz.}$$



(c) stabiler Knoten: $\det A > 0$, $\operatorname{tr} A < 0$
 $(\operatorname{tr} A)^2 > 4 \det A$

$$\lambda_1 < 0$$

$$\lambda_2 < 0$$



(d) instabiler Knoten: $\det A > 0$, $\operatorname{tr} A > 0$
 $(\operatorname{tr} A)^2 > 4 \det A$

$$\lambda_1 > 0$$

$$\lambda_2 > 0$$

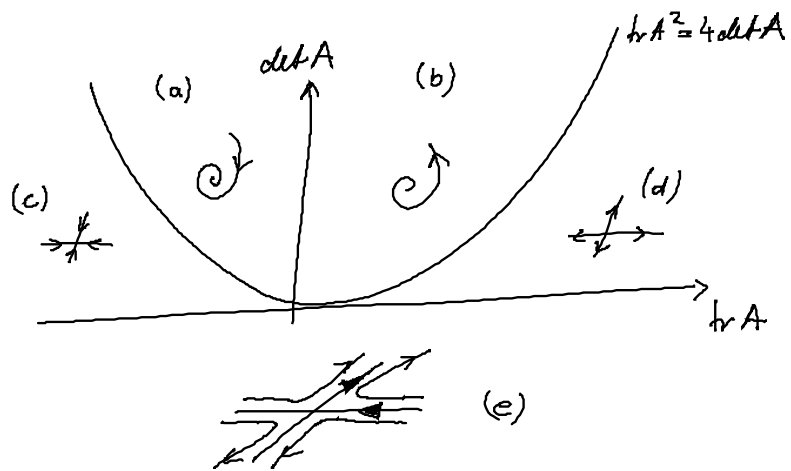


(e) Sattelpunkt: $\det A < 0$

$$\lambda_1 > 0$$

$$\lambda_2 < 0$$

$n=2$



Grenzen zwischen den 5 Bereichen: entartete Fälle

- lin. Stabilitätsanalyse versagt, höhere Terme der Taylorentwicklung um Fixpunkt nötig.
 $\operatorname{tr} A = 0$, $\det A > 0$: entweder Zentrum oder schwach stabiler oder instabiler Fokus.
- qualitative Änderung im Verhalten des Flusses möglich

Bifurkationen = Verzweigung der Lösungsmannigfaltigkeit

1.2.1. Speziell Hamilton'sche Vektorfelder

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

↓ Erhaltungsgröße
 z. B. dyn. Größen

Linearisierung um Fixpunkt \underline{x}^* , $\delta \underline{x}(t) = \underline{x} - \underline{x}^*$

$$\delta \dot{x}_i = \sum_{k=1}^{2f} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right) \delta x_k$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} q \\ \vdots \\ q_f \\ p \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix}$$

$$\text{tr} A = \text{div} \underline{F} = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = 0$$

\Rightarrow Aus $\text{tr} A = 0 = \sum_{i=1}^{2f} \lambda_i$ folgt, dass keine asymptotische Stabilität möglich ist. (sondern Lyapunov-stabil)

Beweis: Falls asymp. stabil, müssen alle $\text{Re} \lambda_i < 0$

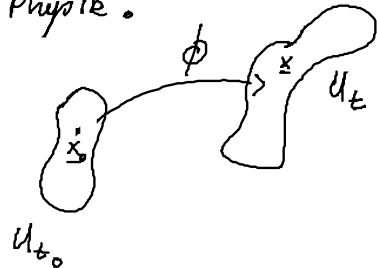
$$\Rightarrow \text{tr} A = \sum_i \text{Re} \lambda_i + \underbrace{i \sum \text{Im} \lambda_i}_{\text{(konj. komplex)}} < 0$$



möglich: $\text{Re} \lambda_i = 0$
 $\lambda_i = \pm i\omega$ (Zentrum)

Falls $f=1$ ($n=2$): Fixpunkte können nur Zentren (falls $\det A > 0$) oder Sattelpunkte sein (falls $\det A < 0$).

Für Hamilton'sche Systeme folgt aus $\text{tr} A = \text{div} \underline{F} = 0$ der Liouville'sche Satz der klass. statistischen Physik.



Beweis

V_t : Phasenraumvolumen

$$V_t = \int_{U_t} d^{2f}x = \int_{U_{t_0}} d^{2f}x_0 \det D\phi_t(x_0)$$

$$= \int_{U_{t_0}} d^{2f}x_0 \left[1 + (t-t_0) \underbrace{\sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial F_i}{\partial x_0^i}}_{(\operatorname{div} F)_{x_0}} + O(t-t_0)^2 \right]$$

$$\begin{aligned} \phi_t(x_0) &= x(t) \\ D\phi_t(x_0)_{ki} &= \left(\frac{\partial x^i(t)}{\partial x_0^k} \right) \\ &\stackrel{\text{Taylor}}{\approx} \underbrace{\frac{\partial x^i(t_0)}{\partial x_0^k}}_{\delta_{ik}} + (t-t_0) \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x^i(t)}{\partial x_0^k}}_{\frac{\partial}{\partial x_0^k} F_i} \\ &\begin{pmatrix} 1+(t-t_0)\dots \\ (t-t_0) \quad 1+\dots \\ \dots & \dots & 1+\dots \\ & & & 1+\dots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= V_{t_0} + (t-t_0) \int d^{2f}x_0 (\operatorname{div} F) + O(t-t_0)^2$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} V_t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{V_t - V_{t_0}}{t - t_0} = \int d^{2f}x_0 \underbrace{(\operatorname{div} F)_{x_0}}_{=0 \text{ für Hamilton'sche Systeme}} = \boxed{0}$$

• Phasenraumvolumina erhalten, d.h. Fluss inkompressibel!