English Summary

Stochastic differential equations (SDE) with Wiener process

$$W(t) = \int_0^{t'} \xi(t')\,dt'$$

Variance and mean of linear SDE

$x \in \mathbb{R}: dx = a\,x\,dt + b\,dW$: $\langle x \rangle = 0$

$$\sigma = \frac{b^2}{-2a} \quad \text{if } a \neq 0 \quad \text{else } \sigma = b^2(t - t_0)$$

autocorrelation : $\Psi(s) = \sigma\, e^{as}$ if $a \neq 0$

$x \in \mathbb{R}^d: d\underline{X} = \underline{\underline{A}}\,\underline{X}\,dt + \underline{\underline{B}}\,d\underline{W}$: $\langle \underline{X} \rangle = 0$

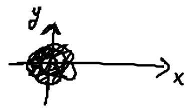
$$\underline{\underline{\sigma}} = \int_0^t e^{\underline{\underline{A}}(t-t')}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{B}}^T e^{\underline{\underline{A}}^T(t-t')}\,dt'$$

4.3. Zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle von rauschinduzierten Oszillationen

Ziel: Kontrolle der Kohärenz (t_{cor}) $\qquad t_{cor} = \frac{1}{\Psi(0)}\int_0^\infty |\Psi(s)|\,ds$

Kontrolle der Zeitskalen ($\langle T \rangle$ mittlere Periode)

$\boxed{1.}$ Van der Pol. Osz. (lokale Osz. um Fixpunkt)

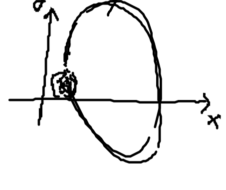


$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = (\varepsilon - x^2)y - \omega_0^2 x + K[y(t-\tau) - y(t)] + D\xi(t)$$

Pyragas Kontrolle

$\boxed{2.}$ FitzHugh - Nagumo - Modell (globale Osz.)

große Exkursion im Phasenraum



$$\varepsilon\dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y$$
$$\dot{y} = x + a \quad + K[y(t-\tau) - y(t)] + D\xi(t)$$

Erinnerung Kohärenzresonanz

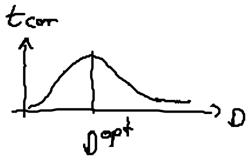
$a < 0$

- lin. SDE $\quad t_{cor} = \int_0^\infty |e^{as}|\, ds = \frac{1}{a}\left[e^{as}\right]_0^\infty = \underline{\underline{-\frac{1}{a}}}$

nicht abhängig vom Rauschen D

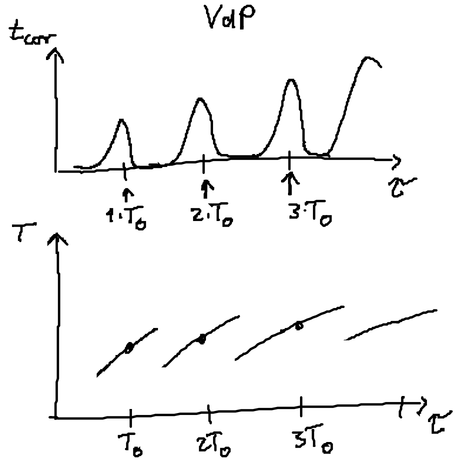
$\to$ keine Kohärenzresonanz möglich

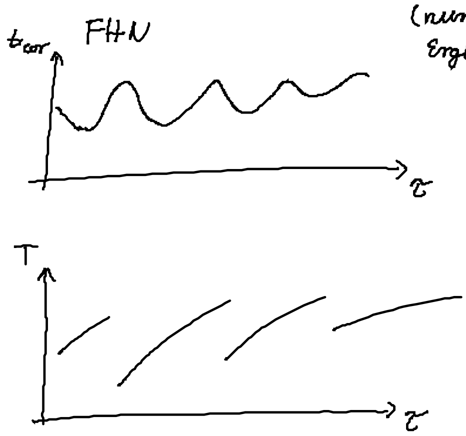
- FHN



- $t_{cor}(D)$ weil große Phasenraum-Exkursionen nicht mit Linearisierung um FP zu beschreiben sind.

mit Kontrolle





(numerisches Ergebnis)

T: Periode der Oszillationen

Janson et al. PRL (2004)

- Verstärkung der Kohärenz
  Vergrößerung von t_{cor} für geeignete τ, K (nichtmonotone Abhängigkeit)

- stückweise lineare Modulation der Periode

Erklärung durch Eigenmoden des stabilen (determ.) Systems:

VdP: Linearis. der Gl. um $x = y = 0$ $\quad (D = 0)$

$$\ddot{x} - \varepsilon\dot{x} + \omega_0^2 x - K(\dot{x}(t-\tau) - \dot{x}(t)) = 0$$

$x \sim e^{\lambda t}$: $\boxed{\lambda^2 - \lambda\varepsilon + \omega_0^2 - K\lambda(e^{-\lambda\tau} - 1) = 0}$ charakterist. Gleichung

Delay induzierte Hopf? suche $\lambda = iq$

Re: $-q^2 + \omega_0^2 - Kq \sin q\tau = 0$ (1)

Im: $-\cancel{q}\underset{\substack{\uparrow \\ <0}}{\varepsilon} + K\cancel{q}(1 - \cos q\tau) = 0$ (2) $\rightarrow$ $\underbrace{\cos q\tau}_{\leq 1} = \underbrace{\frac{K + |\varepsilon|}{K}}_{>1}$ ↯

Nein!

$\rightarrow$ Osz. kommen nur vom Rauschen!

$\lambda = p + i\underline{\underline{q}}$ osz. Verhalten von $\mathrm{Re}\,\lambda$ als Fkt. von τ (in Numerik)

$T_1^e = \frac{2\pi}{|q_1|}$ scheint auf neue Moden zu springen

(Moden überkreuzen sich)

(<u>langsamste</u> Mode am auffälligsten fürs Rauschen)

Suchen Mode mit $\underline{p \approx 0}$ $(|\varepsilon| \ll K)$

($p=0$ ist ausgeschlossen) $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ $\cos q\tau \approx 1$

$q\tau \approx 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$

$\boxed{T_1^e = \frac{2\pi}{|q_1|} \approx \frac{\tau}{n}}$ stückweise linear in τ

$\max(p_1(\tau))$ ist Maximum der Kohärenz

Periode des ungestörten System $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$q = \frac{2\pi n}{\tau} \overset{(1)}{\Rightarrow} q^2 = \omega_0^2 \Rightarrow \tau = 2\pi\frac{n}{\omega_0} = \boxed{nT_0 = \tau}$ (am Maximum von t_{cor} also bei $p \approx 0$)

<u>Wunsch</u> : • analytische Form für das Spektrum der Oszillationen (VdP + Rauschen)

• wäre einfach für lineare SDE (Spektrum über Wiener-Khinchin aus $\Psi(s)$)

<u>Lösung</u>: Mean-field-Näherung der VdP-Osz.

[Pomplun et al. Europhys. Lett. 71 (2005)]

Zunächst $K=0$

<u>Näherung</u>: $\varepsilon - x^2 \approx \boxed{\tilde{\varepsilon} \equiv \varepsilon - \langle x^2 \rangle}$ (gut für $D << |\varepsilon| \omega_0$)

$$\Rightarrow \quad \dot{x} = y$$
$$\dot{y} = \tilde{\varepsilon} y - \omega_0^2 x + D\xi(t) \qquad \text{Linear!}$$

$$\Rightarrow \text{SDE} \quad d\underline{x}_s = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_s\, dt + \underline{\underline{B}}\, d\underline{W}(t)$$

$$\underline{x}_s = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Varianz Matrix $\underline{\underline{\sigma}} = \langle \underline{x}_s(t) \otimes \underline{x}_s(t) \rangle$

$$= \frac{D^2}{-2\tilde{\varepsilon}} \begin{pmatrix} 1/\omega_0^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(siehe VL vom 9.6.)}$$

$$\langle x^2 \rangle = \sigma_{11} = -\frac{D^2}{2\tilde{\varepsilon}\omega_0^2} = \frac{D^2}{-2(\varepsilon - \langle x^2 \rangle)\omega_0^2}$$

selbstkonsistente Gleichung für $\langle x^2 \rangle$ in Abh. von D

$$\langle x^2 \rangle^2 - \varepsilon \langle x^2 \rangle - \frac{D^2}{2\omega_0^2} = 0$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\varepsilon}{2} \pm \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\sqrt{1 + \frac{2D^2}{\varepsilon^2 \omega_0^2}}}_{>1}$$

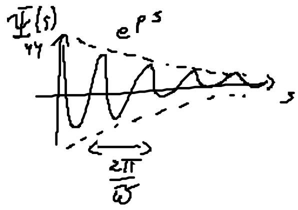
+ unphysikalische Lösung da $\varepsilon < 0$ und $\langle x^2 \rangle > 0$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \langle x^2 \rangle = \frac{\varepsilon}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2D^2}{\varepsilon^2 \omega_0^2}}\right)}$$

Dämpfung wächst mit Rauschintensität

Autokorrelationsfunktion

$$\Psi_{yy}(s) = \langle y(t)\, y(t+s) \rangle = \Psi_{yy}(0)\, e^{\Lambda_1 s} \approx \Psi_{yy}(0)\, e^{ps} \cos \tilde{\omega} s$$

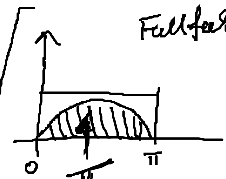


wobei $\lambda_{1,2} = p \pm i\tilde{\omega} = \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \pm i\sqrt{-\frac{\tilde{\varepsilon}}{4} + \omega_0}$

die Eigenwerte von $\underline{A}$

$$\Rightarrow t_{cor} = \frac{1}{\Psi_{44}(0)} \int_0^\infty |\Psi_{44}(s)|\,ds \approx \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{ps}\,ds = -\frac{2}{\pi p} = \boxed{\frac{2}{\pi|p|} = t_{cor}}$$

"Füllfaktor"



$$\frac{\pi}{\pi}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t\,dt = \frac{2}{\pi}$$

- Korrelationszeit vom VdP Osz. hängt von D ab (durch Mean Field Näherung hergeleitet)
- Lin. Osz. hat keine D Abhängigkeit von t_{cor}

Mit Kontrolle $K \neq 0$

$$\lambda^2 - \tilde{\varepsilon}\lambda + \omega_0^2 - K\lambda(e^{-\lambda\tau} - 1) = 0$$

unendlich viele EW $\lambda_j^e = p_j^e + i q_j^e$

Die 2 Eigenwerte $\lambda_{1,2}^e = \delta_p \pm i(1+\delta_p)\omega_0$ mit betragsmäßig kleinsten $|\delta_p|$ sind entscheidend (dann wie lin. SDE)

$$\boxed{t_{cor} = -\frac{2}{\pi\delta_p} \approx \frac{4}{\pi|\tilde{\varepsilon}|}\left(1 + \frac{K}{2}\tau\right)}$$

[Beweis kommt aus Entwicklung der EW für $|\delta_p| \ll 1$]