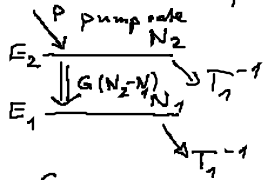


English Summary:

Nonlinear Laser Dynamics

Laser rate equations



G: gain
 T_1 : lifetime of charge carriers
 $\gamma = \tau_{ph} / T_1$
 τ_{ph} photon lifetime

$$\begin{aligned} \dot{I} &= I(D-1) && \text{photon loss} \\ \dot{D} &= \gamma(P - D(1+I)) && \text{electron loss} \end{aligned}$$

\swarrow pump \nwarrow Stimul. Emission

I opt. Intensity
 D inversion

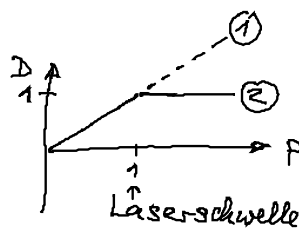
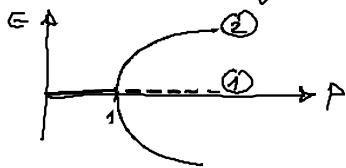
$\gamma \sim 1$: Class A (gas lasers)
 $\sim 10^{-4}$: Class B (solid state laser Nd:YAG)

5.2 Normalform der Laser-Ratengleichungen

$I = E^2$ $E = \sqrt{2G T_1} \tilde{E}$ dim.lose el. Feldamplitude
 $D = G \tau_{ph} (N_2 - N_1)$ dim.lose Inversion des 2-Niveau-Systems
 $P = G \tau_{ph} R_{pump} T_1$ dim.lose Pump rate
 $t = t^{dim} / \tau_{ph}$ dim.lose Zeit

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \dot{E} &= \frac{1}{2} E(D-1) \\ \text{(II)} \quad \dot{D} &= \gamma(P - D(1+E^2)) \end{aligned}$$

stationäre Lösungen:



- ① $E=0, D=P$
- ② $E=\pm\sqrt{P-1}, D=1$

Asymptotische Entwicklung

Def.: Die Summe $\sum_{n=1}^N f_n(\epsilon)$ heißt asymptot. Entwicklung für $\epsilon \rightarrow 0$, wenn

$$\frac{f(\varepsilon) - \sum_{n=1}^N f_n(\varepsilon)}{f_N(\varepsilon)} \rightarrow 0$$

(Die Abweichung von der wahren Fkt. f ist kleiner als der letzte Term der Entwicklung)

Üblicherweise Entwicklung in Potenzreihe ε

$$f(\varepsilon) \approx \sum_{n=1}^N a_n \varepsilon^n \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

- Vielzeiteransatz für Lasergl. (reduktive Störungsrechn.)

Potenzreihen

$$E = \varepsilon E_1 + \varepsilon^2 E_2 + \dots$$

$$D = 1 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad \begin{array}{l} \text{(ungestörtes Problem } \varepsilon=0: \\ P=1 \text{ (Laserschwelle): } E=0 \\ D=1 \end{array}$$

kleiner Parameter

$$P-1 = \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots$$

verschiedene Zeitskalen als unabhängige Variablen

$$\tau_1 = \varepsilon t \quad \text{„langsam“}$$

$$\tau_2 = \varepsilon^2 t \quad \text{„noch langsamer“}$$

$$\vdots$$

$$\tau_n = \varepsilon^n t$$

$$\Rightarrow E(t) = E(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$$

\Rightarrow Kettenregel beim Zeitableiten

$$\frac{dE}{dt} = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial \tau_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial E}{\partial \tau_2} + \dots$$

$$\uparrow$$

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial t}$$

Einsetzen in (I) und (II) rechte Seite:

$$\dot{E} = \frac{1}{2} (\varepsilon E_1 + \varepsilon^2 E_2) (\varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2) + O(\varepsilon^4)$$

$$\dot{D} = \gamma (1 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 - (1 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \varepsilon^3 D_3) (1 + \varepsilon^2 E_1^2 + 2\varepsilon E_1 E_2 \varepsilon^3)) + O(\varepsilon^4)$$

linke Seite:

$$\dot{E} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau_1} (\varepsilon E_1) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau_1} (\varepsilon^2 E_2) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau_2} (\varepsilon E_1) + O(\varepsilon^4)$$

$$\dot{D} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau_1} (\varepsilon D_1) + \varepsilon^3 \left[\frac{\partial}{\partial \tau_1} D_2 + \frac{\partial}{\partial \tau_2} D_1 \right] + O(\varepsilon^4)$$

Sortieren nach Ordnungen von ε :

Koeffizientenvergleich

$$O(\varepsilon) \quad 0 = p_1 - D_1 \quad (a)$$

$$O(\varepsilon^2) \quad \frac{\partial E_1}{\partial \kappa_1} = \frac{1}{2} E_1 D_1 \quad (b)$$

$$\frac{\partial D_1}{\partial \kappa_1} = \frac{1}{2} (p_2 - D_2 - E_1^2) \quad (c)$$

$$O(\varepsilon^3) \quad \frac{\partial E_2}{\partial \kappa_1} + \frac{\partial E_1}{\partial \kappa_2} = \frac{1}{2} (E_2 D_1 + E_1 D_2) \quad (d)$$

Iteratives Lösen der Gln. (a) - (d)

$$O(\varepsilon) \quad D_1 = p_1 \xrightarrow[\text{in } O(\varepsilon^2)]{\text{einsetzen}} \frac{\partial E_1}{\partial \kappa_1} = \frac{1}{2} p_1 E_1$$

$$E_1 = E_1(0) e^{\frac{1}{2} p_1 \kappa_1}$$

unbeschränkt oder Null für $p_1 \neq 0$

↙ Annahme

$$\Rightarrow p_1 = 0 = D_1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_1}{\partial \kappa_1} = 0 \quad E_1 \text{ nicht von } \kappa_1 \text{ abhängig!}$$

$$(c): D_2 = p_2 - E_1^2, \text{ da } D_1 = 0$$

$\Rightarrow D_2$ auch nicht von κ_1 abhängig

$$(d): \frac{\partial E_2}{\partial \kappa_1} = \underbrace{-\frac{\partial E_1}{\partial \kappa_2} + \frac{1}{2} E_1 D_2}_{\text{nicht von } \kappa_1 \text{ abh.}} \quad (+ E_2 D_1)$$

= const. $\Rightarrow E_2$ unbeschränkt falls const. $\neq 0$

$$(*) \quad \frac{\partial E_1}{\partial \kappa_2} = \frac{1}{2} E_1 D_2 = \frac{1}{2} E_1 (p_2 - E_1^2)$$

Dgl. für $E_1(\kappa_2)$

$$p_1 - 1 = \cancel{E_1} + E_1^2 p_2$$

$$\text{BedA: } p_2 = 1, \quad p_i = 0 \quad (j \geq 3)$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \sqrt{p-1}}$$

Rücktransformation:

Wir wissen: $D_1 = 0$, $p_1 = 0$, $\frac{\partial E_2}{\partial \tau_1} = \frac{\partial E_1}{\partial \tau_1} = 0$

$$\dot{E} = \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau_1} (\epsilon E_1) + \epsilon^2 \left[\frac{\partial E_2}{\partial \tau_1} + \frac{\partial E_1}{\partial \tau_2} \right] + \dots \Rightarrow \dot{E} = \epsilon^3 \frac{\partial E_1}{\partial \tau_2}$$

$$E = \epsilon E_1 + \epsilon^2 E_2 \Rightarrow \epsilon E_1 = E - O(\epsilon^2)$$

$$D = 1 + \epsilon D_1 + \epsilon^2 D_2$$

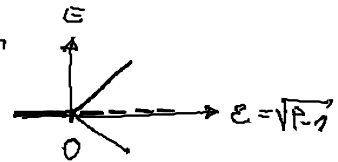
⇒ Einsetzen in (*)

$$\dot{E} = \epsilon^3 \left(\frac{1}{2} E_1 (1 - E_1^2) \right) = \frac{1}{2} E \epsilon^2 (1 - \frac{1}{\epsilon^2} E^2 + O(\epsilon^2))$$

$$\frac{dE}{dt} = \dot{E} = \frac{1}{2} E (\epsilon^2 - E^2) + O(\epsilon^3)$$

Normalform der Laserbifurkation
an der Laserschwelle

→ Stimmgabel-Bifurkation
als Fkt. v. P



- Normalform ergibt Lösung des Dgl-Systems nicht nur in der Nähe des Fixpt.



$P=1$: krit. Verlangsamung

$$\tau_2 = \epsilon^2 t = (P-1) t$$

τ_2 wird beliebig langsam
für $\epsilon \rightarrow 0$

($P \rightarrow 1$)

Nichtgleichgewicht-
Phasenübergang

2. Ordnung

(H. Haken 1970)

- Gültigkeitsgrenzen der Amplitudengl.?

Beim Ansatz der Vielzeiteasympptik wurde die Zeithale $\gamma P = \lambda_1$ ignoriert (2. Eigenwert der lin. Stab. analyse des Fixpt.)

Das ist OK, wenn γP nur schnelles exp. Abfall liefert.

Problem, wenn γP klein!

\Rightarrow nur gültig für $|P-1| \ll \gamma$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= -\gamma P + \frac{P-1}{P} \\ \lambda_2 &= -\frac{P-1}{P} \end{aligned} \right\} \S 5.1$$

- für $\gamma = 10^{-3}$ (class B Laser) lässt dies nur einen kleinen Gültigkeitsbereich zu

grenzfall $\gamma \rightarrow 0$ {

- lineare Stabilitätsanalyse für festes P (nahe am Fixpt.) $\Rightarrow \S 5.1$
- $|P-1| \ll \gamma \Rightarrow$ Amplitudengl. $\S 5.2$
- P fest + weit weg vom Fixpt. $\Rightarrow \S 5.3$