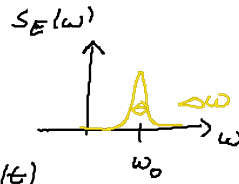


## English Summary

- Linewidth of a laser is determined by variance of the phase  $\phi$  of  $E = A(t)e^{i\phi(t)}$



$\Delta\omega = 0$  without noise

$$\Delta\omega = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sigma_{\phi\phi}(t)$$

$$\Delta\omega = \frac{D^2}{A^2} (1 + \alpha^2)$$

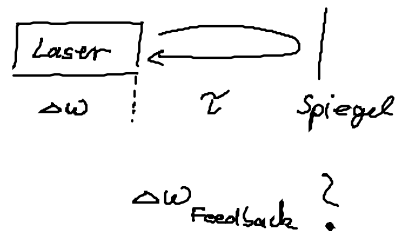
$\alpha$ : amplitude-phase coupling

$D$ : noise strength of spontaneous emission

$A^2 \hat{=} P_{out}$  output power/intensity

## 5.8.2. Linienbreite mit optischem Feedback

Frage: Wie beeinflusst das zeitverzögerte optische Feedback die Linienbreite?



Gleichung für Laser + Delay + Rauschen

$$\dot{\tilde{E}} = (1 + i\alpha)(\gamma - |\tilde{E}|^2)\tilde{E} + D \xi + i\omega_0 \tilde{E} + k\tilde{E}(t-z)$$

• Zunächst  $\alpha = 0$ !

• Amplitude + Phasen Darstellung  
 $\dot{E} = A i \dot{\phi} e^{i\phi} + \dot{A} e^{i\phi}$

Idee: Suchen eine effektive Rauschstärke  $D^{\text{eff}}$ , die den Einfluss des Delay-Terms berücksichtigt.

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{A} = (\gamma - A^2)A + D \xi^i + k A(t-\tau) \cos(\phi(t-\tau) - \phi(t)) \\ \dot{\phi} = \omega_0 + \frac{D}{A(t)} \xi^{ii} + k \frac{A(t-\tau)}{A(t)} \sin(\phi(t-\tau) - \phi(t)) \end{cases}$$

Erinnerung: • Feedback ändert Frequenz der Lösungen (ECM)

$$\omega_c - \omega_0 = -k \alpha \cos \omega_0 \tau - k \sin \omega_0 \tau$$

$$\alpha = 0 \quad \omega_c = -k \sin \omega_0 \tau + \omega_0$$

• Rotation der Phase ins mitbewegte Koordinatensystem  $\omega_c$

$$\Delta \phi = \phi - \omega_c t$$

$$\dot{\Delta \phi} = \dot{\phi} - \omega_c$$

→ dann ist  $\dot{\Delta \phi} = 0$  auf ECM also Fixpunkt

Betrachte zuerst nur

Phasengleichung auf ECM Lösung  $A(t-\tau) = A(t) = A_c$

$$\dot{\Delta \phi} = (\omega_0 - \omega_c) + \frac{D}{A_c} \xi^{ii} + k \sin(\Delta \phi(t-\tau) - \Delta \phi(t) - \omega_c \tau)$$

$$\text{Näherung: } \frac{d\Delta \phi}{dt} \approx \frac{\Delta \phi(t) - \Delta \phi(t-\tau)}{\tau} \quad (\text{für kleine } \tau)$$

$$\approx \omega_0 - \omega_c + \frac{D}{A_c} \xi^{ii} + k \sin(-\tau \dot{\Delta \phi} - \omega_c \tau)$$

## Abschätzung von $\tau \dot{\Delta\phi}$ :

auf der ECM ist  $\dot{\Delta\phi} = 0$  und ändert sich nur durch Rauschen



Werte: HL Laser  $\Delta\nu \approx 10\text{MHz}$   
 $\rightarrow L_{\text{coh}} \approx 5\text{m}$   
 Faserlaser  $\Delta\nu \sim \text{kHz}$   
 $\rightarrow L_{\text{coh}} \approx 100\text{km}$

$$\Delta\omega = \frac{1}{\tau_{\text{coh}}}$$

Kohärenzzeit ↑

Annahme:  $\tau \ll \tau_{\text{coh}}$

$$\tau \frac{1}{\tau_{\text{coh}}} = \tau \dot{\Delta\phi} \ll 1$$

Taylor um  $x_0 = -\omega_c \tau$

$$\dot{\Delta\phi} \approx \omega_0 - \omega_c + \frac{D}{A^c} \xi^{ii} + k \left[ \sin(-\omega_c \tau) - \tau \dot{\Delta\phi} \cos(-\omega_c \tau) \right]$$

↳ 1. Ordnung in  $\tau \dot{\Delta\phi}$

$$\text{ECM: } \omega_c - \omega_0 = -k \sin(\omega_c \tau)$$

$$\dot{\Delta\phi} \approx \frac{D}{A^c} \xi^{ii} - \tau \dot{\Delta\phi} k \cos(\omega_c \tau)$$

$$\boxed{\dot{\Delta\phi} \approx \frac{D}{A^c} \frac{1}{1 + \tau k \cos(\omega_c \tau)} \xi^{ii}} \quad \hat{=} \quad \frac{D^{\text{eff}}}{A^c} \xi^{ii}$$

$$D^{\text{eff}} := \frac{D}{1 + \tau k \cos \omega_c \tau}$$

• gilt nur für kleine  $\tau$ ,  
 also keine zusätzlichen  
 Bifurkationen durch  $\tau$

$$\begin{aligned} \text{falls } \omega_c \tau = 0, 2\pi &\rightarrow D^{\text{eff}} < D \\ \omega_c \tau = \pi &\rightarrow D^{\text{eff}} > D \end{aligned}$$

Linienbreite des Lasers:

$$\Delta\omega = \frac{D \frac{d\theta}{dt}^2}{A^2} (1 + \alpha^2) = \frac{D^2}{A^2 (1 + \alpha^2 \cos^2 \omega_c \tau)} (1 + \alpha^2) = \Delta\omega$$

aus S. 8.1.

→ Feedback kann die Linienbreite stark verkleinern falls Phase gut justiert wird.

Ende

## Zusammenfassung

- ① • Fluss von dyn. Systemen
  - Attraktoren, Phasenraumvolumen (Hamilton'schen Systemen)  
dissipativen
  - Bifurkationen
    - EW 0
      - Sattel-Knoten  $\dot{x} = \mu - x^2$
      - transkritisch  $\dot{x} = \mu x - x^2$
      - Stirnabel  $\dot{x} = \mu x - x^3$
    - Hopf-Bif.
    - Auffinden über  $\rightarrow \lambda = i\omega$   
 $\rightarrow$  suchen nach period. Lösungen
    - Globale Bifurkationen
      - Homokline
      - Blue-Sky
  - Chaos
    - Lyapunov Exponent
    - gebrochene Dimension
- } globale Änderung  
des Phasenporträts  
→ nicht mit linearer  
Stabilitätsanalyse

② Feedback, Delay

- Kontrolle mit Pyragas
- nichtinvasiv

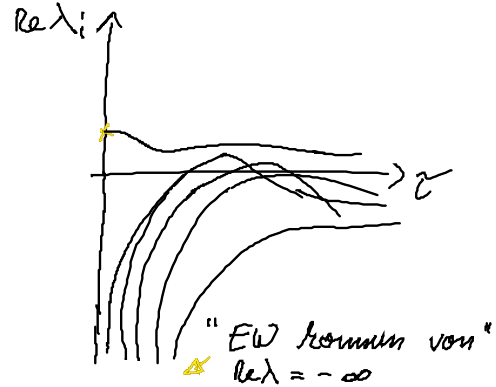
$$\dot{x} = f(x) + K(x(t-\tau) - x(t))$$

$$\left[ \dot{x} = \underbrace{f(x) - Kx(t)} + K(x(t-\tau)) \right]$$

- Phasenraum wird unendlich dimensional
- charakteristisches Polynom ist transzendent (Lambert Funktion)

üblicherweise der Form:

$$0 = \lambda - K(1 - e^{-\lambda\tau})$$



- Stabilisierung  $\left[ T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \right]$
- $(\lambda = \lambda_0 + i\omega_0)$  FP : Delay  $\tau = \frac{T_0}{2}$
- Orbit : Delay  $\tau = T_0$
- mit  $f(t+T_0) = f(t)$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \leftarrow$$

③ gekoppelte Systeme

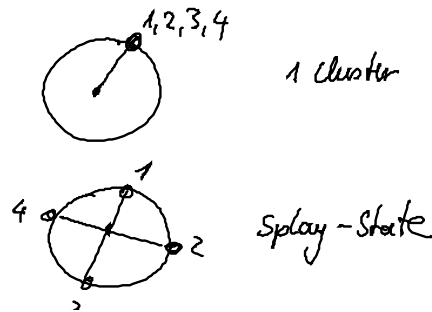
Synchronisierung: Master stability function  $\{ \text{Lyapunov Exponent senkrecht zur synchron. Mannigfaltigkeit} \}$

Netzwerke  $\rightarrow$  Topologie  $\leftrightarrow$  Adjacency-matrix

$\rightarrow$  Dynamik  $\leftrightarrow$  DGL

Grenzwert  $\tau \rightarrow \infty$

Cluster Synchronisierung



gekoppelte

Hopf-Normalform  $\rightarrow$  Stabilität gut in neuen Koordinaten bestimmbar

$$2x^S = x_1 - x_2$$

$$2x^A = x_2 + x_1$$

$\rightarrow$  entkoppeltes DGL-System in  $x^S$  und  $x^A$

#### ④ Rauschen

- stochastische DGL
- Kohärenzresonanz

Lineare SDE

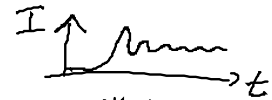
$$dx = A dt + B dW$$

Wieners Prozess  $\hat{=}$  Random walk



Lineare SDE  $\rightarrow$  nie "Kohärenzresonanz"

- Varianzmatrix analytisches Ergebnis aus linearisierter SDE



#### ⑤ Laser

- Rategleichungen  $I, D \leftarrow$  Relaxationsoszillationen Turn-on Delay
- $E, D \leftarrow$  Normalform an der Schwelle

- Spiking (Berechnung über Koordinatenwechsel)

class A,  $\mu$  groß  
Gaslaser  $> 1$

class B,  $\mu$  klein  
Halbleiter  $\sim 10^{-4}$

$$\mu = \frac{\tau_{ph}}{\tau_{rel}}$$

- optische Injektion
- Adler Gleichung



- Amplituden Phasenkopplung

Methodik : Asymptotische Reduktion  
(Entwicklung nach kleinen Parametern)

• optischer Feedback

• Fixpunkte  $\rightarrow$  ECM's ( $\omega_c$ )

• Stabilitätsgrenze

• Linienbreite über Phasengleichung

